

Р. У. Ибатуллин

## ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО ПАРУСА

Магнитное поле вокруг корабля испытывает давление набегающего потока заряженных частиц, благодаря чему создаётся тяга

$$F = \eta p S = \eta \frac{\rho (\vec{v} - \vec{u})^2}{2} \pi R^2 \quad (1)$$

где  $\eta$  – эффективность магнитного паруса (коэффициент «сцепления» магнитного поля с кораблём, или доля полученного от частиц импульса, которую магнитное поле передаёт корпусу корабля;  $0 < \eta < 1$ ),

$p$  – давление потока частиц,

$\rho$  — плотность газа из заряженных частиц,

$v$  – скорость корабля в неподвижной системе отсчёта,

$u$  – скорость потока частиц в той же системе отсчёта,

$(\vec{v} - \vec{u})$  — относительная скорость корабля и потока частиц,

$S$  – эффективное сечение магнитного поля,

$R$  – эффективный радиус магнитного поля (расстояние от центра до магнитопаузы).

Эффективный радиус магнитного поля определяется из следующего условия: давление потока частиц на магнитопаузе должно уравновешивать давление магнитного поля.

$$\frac{\rho (\vec{v} - \vec{u})^2}{2} = \frac{B(R)^2}{2\mu_0} \quad (2)$$

где  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная,

$B(R)$  – магнитная индукция на расстоянии  $R$  от корабля.

Если считать магнитное поле дипольным, то в плоскости магнитного экватора

$$B = B_0 (r/R)^3 \quad (3)$$

где  $B_0$  — магнитная индукция на поверхности магнита,

$r$  – радиус магнита.

Подставляя (3) в (2), получаем выражение для эффективного радиуса, а из него для эффективной площади:

$$S = \pi r^2 \left( \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho} \right)^{1/3} |\vec{v} - \vec{u}|^{-2/3} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получаем ускорение

$$\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = F/m = \eta \frac{\pi r^2}{2m} (\rho^2 B_0^2 / \mu_0)^{1/3} |\vec{v} - \vec{u}|^{4/3} = k |\vec{v} - \vec{u}|^{4/3} \quad (5)$$

где  $m$  – масса корабля. Направление ускорения совпадает с направлением разности  $\vec{u} - \vec{v}$  (т. е. скорости потока частиц относительно корабля).

Буквой  $k$  мы для краткости обозначили произведение

$$k = \eta \frac{\pi r^2}{2m} (\rho^2 B_0^2 / \mu_0)^{1/3} \quad (5a)$$

имеющее размерность  $1 \text{ м}^{-1/3} \text{ с}^{-2/3}$  и остающееся постоянным в ходе полета.

Рассмотрим два случая:

1) разгон корабля струёй частиц, или режим собственно магнитного паруса

$$(\vec{u}=(u,0,0), \vec{v}=(v,0,0), u > v \geq 0);$$

2) торможение корабля встречной струей частиц или неподвижной средой — режим магнитного парашюта ( $\vec{u}=(-u,0,0), \vec{v}=(v,0,0), u \geq 0, v > 0$ ).

В обоих случаях считаем скорость струи частиц  $u = \text{const}$ .

1) Разгон. Дифференциальное уравнение движения и его решения (ускорение, скорость, путь):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{(v-u)^{4/3}} &= k dt \\ a_0 &= k(u-v_0)^{4/3} \\ a(t) &= a_0 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{a_0 t}{u-v_0}\right)^{-4} \\ v(t) &= u - (u-v_0) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{a_0 t}{u-v_0}\right)^{-3} \\ s(t) &= ut + \frac{3}{2} \frac{(u-v_0)^2}{a_0} \left[ \left(1 + \frac{1}{3} \frac{a_0 t}{u-v_0}\right)^{-2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

где  $v_0$  — начальная скорость корабля (считается данной),  $a_0$  — начальное ускорение.

2) Торможение. Дифференциальное уравнение движения и его решения (ускорение, скорость, путь):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{(v+u)^{4/3}} &= -k dt \\ a_0 &= -k(u+v_0)^{4/3} \\ a(t) &= a_0 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{|a_0|t}{u+v_0}\right)^{-4} \\ v(t) &= -u + (u+v_0) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{|a_0|t}{u+v_0}\right)^{-3} \\ s(t) &= -ut - \frac{3}{2} \frac{(u+v_0)^2}{|a_0|} \left[ \left(1 + \frac{1}{3} \frac{|a_0|t}{u+v_0}\right)^{-2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Реальные значения параметров для подстановки в формулы (6-7).

Скорость частиц солнечного ветра в окрестностях Земли:  $u = (4 \div 7) \cdot 10^5$  м/с.

Плотность частиц солнечного ветра в окрестностях Земли:  $\rho = (1 \div 10) \cdot 10^{-21}$  кг/м<sup>3</sup>.

Плотность межзвёздной среды —  $\rho = (1 \div 10) \cdot 10^{-22}$  кг/м<sup>3</sup>.

Пусть магнитное поле создаётся сверхпроводящей токовой петлёй радиуса  $r$ ; толщина провода  $d$ , плотность материала сверхпроводника  $\rho_{\text{св}}$ , предел прочности  $\sigma_{\text{св}}$ . Тогда величины  $r$ ,  $d$ ,  $B_0$  и  $t$  связаны следующими соотношениями:

$$m = \frac{\pi^2}{2} r d^2 \rho_{cs} + m' \quad (8)$$

где  $m'$  — масса полезного груза,

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \quad (9)$$

Плотность тока в сверхпроводнике не должна превышать критического значения  $j_{кр}$ . Ток в сверхпроводнике течёт по поверхностному слою толщиной порядка 1 мкм (лондоновское расстояние  $\lambda$ ), поэтому сила и плотность тока связаны отношением

$$I = \pi d \lambda j \quad (10)$$

соответственно, ограничения на силу тока и магнитную индукцию

$$I < \pi d \lambda j_{кр} \quad (11)$$

$$B_0 < \mu_0 \lambda j_{кр} \quad (12)$$

Сила Ампера, действующая на единицу длины проводника (растягивая его)

$$\frac{dF}{dl} = \frac{m_e}{e^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{j^2}{r n_e} \quad (13)$$

где  $m_e$ ,  $e$  — масса и заряд электрона ( $m_e / e^2 = 3,55 \cdot 10^7$  кг/Кл<sup>2</sup>),

$n_e$  — концентрация свободных электронов в проводнике (порядка  $10^{28} \div 10^{29}$  м<sup>-3</sup>).

Напряжение силы упругости в проводнике

$$\sigma = \frac{m_e}{e^2} \cdot \frac{j^2}{n_e} \quad (14)$$

Оно не должно превышать предела прочности.

Магнитная индукция и температура также не должны превышать критических значений.

Чтобы ионы внешней среды успели заметно отклониться в магнитном поле, его размер должен быть порядка инерционной длины этой среды:

$$R \sim r \sim c / \omega \quad (15)$$

где  $c$  — скорость света,

$\omega$  — плазменная частота среды:

$$\omega(\text{Гц}) = 5,64 \cdot 10^4 \sqrt{n} \quad (16)$$

$n$  — концентрация ионов в среде (см<sup>-3</sup>). Для солнечного ветра и межзвёздного газа  $R$  имеет порядок 1-10 км.

Таблица 1

Параметры некоторых сверхпроводников

Вещество	Критическая температура, К	Плотность, кг/м <sup>3</sup> (норм. усл.)	Критическая плотность тока, А/м <sup>2</sup>	Критическая магнитная индукция, Тл	Комментарий
Nb <sub>3</sub> Sn	18		$2 \cdot 10^9$	24÷28	хрупкий, использ. в магнитах
NbTi	10		$(3\div 8) \cdot 10^8$	12	используется в проводах
NbN	16	8470	$(2\div 5) \cdot 10^{11}$	8÷13	используется в детекторах

Таблица 2  
Возможные параметры паруса  
(принято  $\eta = 0,01$ )

Материал	NbN
Толщина провода, мм	1
Радиус витка, км	10
Масса витка, кг	420
Ток, А	37
Плотность тока у поверхности, А/м	$3 \cdot 10^{11}$
Магнитная индукция на поверхности провода, Тл	0,01
Начальная тяга в режиме разгона солнечным ветром $F_0 = m a_0$ , Н ( $\rho = 10^{-21}$ кг/м <sup>3</sup> ; $v_0 = 0$ ; $u = 400$ км/с)	2,57
Начальная тяга в режиме торможения межзвёздным газом, Н ( $\rho = 10^{-22}$ кг/м <sup>3</sup> ; $v_0 = 0,1$ С; $u = 0$ км/с)	-175
То же, $v_0 = 0,5$ С	-1500