

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Составитель – Р. У. Ибатуллин

Последняя версия — 31 октября 2014 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. КОНСТАНТЫ, МЕРЫ, КООРДИНАТЫ.....	2
А. Константы.....	2
Б. Меры расстояния.....	2
В. Меры времени.....	2
Г. Меры массы.....	2
Д. Меры мощности и энергии.....	3
Е. Меры давления.....	3
Ж. Системы координат.....	3
2. ЗВЁЗДЫ.....	5
А. Звёздная величина и светимость.....	5
Б. Температура, радиус, масса, спектральный класс.....	6
В. Время жизни.....	8
3. ПЛАНЕТЫ.....	10
А. Размер орбиты.....	10
Б. Эксцентриситет.....	12
В. Орбитальный период.....	13
Г. Осевой период.....	14
Д. Масса, плотность, тяготение.....	15
Е. Альbedo и яркость.....	17
Ж. Спутники.....	19
З. Приливы.....	21
И. Планеты как эллипсоиды.....	22
К. Столкновения с астероидами.....	23
Л. Химический состав планет.....	26
4. УСЛОВИЯ НА ПЛАНЕТАХ.....	28
А. Состав атмосферы.....	28
Б. Давление и плотность атмосферы.....	29
В. Температура на поверхности.....	31
Г. Тектоника.....	33
Д. Магнитное поле.....	33
5. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ.....	35
А. Искривление пространства-времени.....	35
Б. Чёрные дыры.....	36
В. Космология.....	37
6. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ.....	40
А. Аккреция.....	40
Б. Самогравитация.....	41
В. Гравитация несферических тел.....	42
Список литературы.....	44

1. КОНСТАНТЫ, МЕРЫ, КООРДИНАТЫ

А. Константы

Гравитационная постоянная

$$G = 6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$$

Скорость света

$$c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$$

Постоянная Стефана-Больцмана

$$\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$$

Универсальная газовая постоянная

$$\mathcal{R} = 8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)}$$

Б. Меры расстояния

1 радиус Земли* ($R_{зем}$)	$= 6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$	$= 0,09 R_{юп}$	$= 0,009 R_{сол}$
1 радиус Юпитера* ($R_{юп}$)	$= 6,991 \cdot 10^7 \text{ м}$	$= 10,97 R_{зем}$	$= 0,10 R_{сол}$
1 радиус Солнца* ($R_{сол}$)	$= 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$	$= 109 R_{зем}$	$= 9,96 R_{юп}$
1 астрономическая единица (а. е.)	$= 1,496 \cdot 10^{11} \text{ м}$	$= 1,58 \cdot 10^5 \text{ св. г.}$	$= 4,85 \cdot 10^6 \text{ пс}$
1 световой год (св. г.)	$= 9,461 \cdot 10^{15} \text{ м}$	$= 63\,240 \text{ а. е.}$	$= 0,3066 \text{ пс}$
1 парсек (пс)	$= 3,086 \cdot 10^{16} \text{ м}$	$= 206\,265 \text{ а. е.}$	$= 3,262 \text{ св. г.}$

* Волуметрический средний.

В. Меры времени

1 календарные сутки (сут) $= 8,64 \cdot 10^4 \text{ с}$

1 григорианский год (г) $= 365,2425 \text{ сут} = 3,1557 \cdot 10^7 \text{ с}$

Г. Меры массы

1 масса Земли ($M_{зем}$)	$= 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ кг}$	$= 3 \cdot 10^{-3} M_{юп}$	$= 3 \cdot 10^{-6} M_{сол}$
1 масса Юпитера ($M_{юп}$)	$= 1,8986 \cdot 10^{27} \text{ кг}$	$= 317,8 M_{зем}$	$= 9,5 \cdot 10^{-4} M_{сол}$
1 масса Солнца ($M_{сол}$)	$= 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ кг}$	$= 332\,946 M_{зем}$	$= 1048 M_{юп}$

Д. Меры мощности и энергии

1 светимость Солнца ($L_{сол}$)		$= 3,842 \cdot 10^{26}$ Вт
1 джоуль (Дж)	$= 2,390 \cdot 10^{-10}$ т ТНТ	$= 6,242 \cdot 10^{18}$ эВ
1 тонна тротилового эквивалента (т ТНТ)		$= 4,184 \cdot 10^9$ Дж
1 электрон-вольт (эВ)		$= 1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж

Е. Меры давления

1 паскаль (Па)	$= 10^{-5}$ бар	$= 9,8692 \cdot 10^{-6}$ атм	$= 7,5006 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст.
1 бар	$= 100\,000$ Па	$= 0,98692$ атм	$= 750,06$ мм рт. ст.
1 атмосфера (атм)	$= 101\,325$ Па	$= 1,01325$ бар	$= 760$ мм рт. ст.
1 мм рт. ст.	$= 133,32$ Па	$= 1,3332 \cdot 10^{-3}$ бар	$= 1,3158 \cdot 10^{-3}$ атм

Ж. Системы координат

Экваториальная на небесной сфере: прямое восхождение α (или часовой угол H), склонение δ .

Экваториальная на земной поверхности: долгота λ , широта φ .

Горизонтальная: азимут A , высота a .

Переход от экваториальной системы к горизонтальной

$$\sin a = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \quad (1.Ж.1а)$$

$$\cos A \cdot \cos a = \cos \varphi \cdot \sin \delta - \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \quad (1.Ж.1б)$$

$$\sin A \cdot \cos a = -\cos \delta \cdot \sin H \quad (1.Ж.1в)$$

Переход от горизонтальной системы к экваториальной

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin a + \cos \varphi \cdot \cos a \cdot \cos H \quad (1.Ж.2а)$$

$$\cos H \cdot \cos \delta = \cos \varphi \cdot \sin a - \sin \varphi \cdot \cos a \cdot \cos A \quad (1.Ж.2б)$$

$$\sin H \cdot \cos \delta = -\cos a \cdot \sin A \quad (1.Ж.2в)$$

Часовой угол

$$H = T_s - \alpha \quad (1.Ж.3)$$

где T_s – местное звёздное время, выраженное в тех же единицах, что H и α (часах или градусах).

Склонение Солнца

$$\delta_{сол} = -I \cdot \cos\left(360^\circ \cdot \frac{n}{N}\right) \quad (1.Ж.4)$$

где $I = 23,45^\circ$ – угол наклона земной оси,

$N = 365$ – число дней в году,

n – число дней, прошедших от последнего зимнего солнцестояния (= 10 + номер текущего дня в году).

Высота Солнца над горизонтом в полдень

$$a_{сол} = 90^\circ - \phi + \delta_{сол} \quad (1.Ж.5)$$

Продолжительность светового дня (от восхода до заката)

$$T_{д}(\text{ч}) = 2 \arccos(\text{tg } \phi \cdot \text{tg } \delta_{сол}) / 15^\circ \quad (1.Ж.6)$$

Азимуты точек восхода и захода

$$A_{восх} = 180^\circ - A_{зах} = \arccos \frac{\sin \delta_{сол}}{\cos \phi} \quad (1.Ж.7)$$

2. ЗВЁЗДЫ

А. Звёздная величина и светимость

Абсолютная визуальная звёздная величина

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{виз} &= m^{виз} + 5 - 5 \log_{10} (D / 1 \text{ пс}) = \\ &= 4,82 - 2,5 \log_{10} (F / F_{сол}) \end{aligned} \quad (2.A.1a)$$

где $m^{виз}$ – относительная (наблюдаемая) визуальная звёздная величина,

D – расстояние до звезды,

F – световой поток от звезды,

$F_{сол}$ – световой поток от Солнца: $3,469 \cdot 10^{28}$ люмен.

Относительная визуальная звёздная величина

$$\begin{aligned} m^{виз} &= \mathcal{M}^{виз} - 5 + 5 \log_{10} (D / 1 \text{ пс}) = \\ &= 5 \log_{10} (D / 1 \text{ пс}) - 2,5 \log_{10} (F / F_{сол}) - 0,17 \end{aligned} \quad (2.A.1б)$$

Световой поток

$$\begin{aligned} F &= F_{сол} \cdot 2,512^{4,83 - \mathcal{M}^{виз}} = \\ &= F_{сол} \cdot (D / 1 \text{ пс})^2 \cdot 2,512^{-0,17 - m^{виз}} \end{aligned} \quad (2.A.1в)$$

Абсолютная болометрическая (по всему спектру, включая невидимое глазом излучение) звёздная величина

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{бол} &= m^{бол} + 5 - 5 \log_{10} (D / 1 \text{ пс}) = \\ &= 4,75 - 2,5 \log_{10} (L / L_{сол}) \end{aligned} \quad (2.A.2a)$$

где $m^{бол}$ – относительная (наблюдаемая) болометрическая звёздная величина,

L – светимость звезды,

$L_{сол}$ – светимость Солнца: $3,842 \cdot 10^{26}$ Вт.

Относительная болометрическая звёздная величина

$$\begin{aligned} m^{бол} &= \mathcal{M}^{бол} - 5 + 5 \log_{10} (D / 1 \text{ пс}) = \\ &= 5 \log_{10} (D / 1 \text{ пс}) - 2,5 \log_{10} (L / L_{сол}) - 0,25 \end{aligned} \quad (2.A.2б)$$

Светимость

$$\begin{aligned} L &= L_{сол} \cdot 2,512^{4,75 - \mathcal{M}^{бол}} = \\ &= L_{сол} \cdot (D / 1 \text{ пс})^2 \cdot 2,512^{-0,25 - m^{бол}} \end{aligned} \quad (2.A.2в)$$

Связь между визуальными и болометрическими звёздными величинами

$$\mathcal{M}^{бол} - \mathcal{M}^{виз} = m^{бол} - m^{виз} = BC \quad (2.A.3a)$$

где BC — болометрическая поправка (табличная величина, зависящая от спектрального класса звезды; для Солнца $BC = -0,07$).

Связь между светимостью и световым потоком

$$F = F_{сол} \cdot (L / L_{сол}) \cdot 2,512^{BC+0,07} =$$

$$= 96,29 \text{ лм} \cdot (L / 1 \text{ Вт}) \cdot 2,512^{BC+0,07} \quad (2.A.36)$$

Б. Температура, радиус, масса, спектральный класс

Связь светимости, температуры и радиуса

$$L = L_{сол} \left(\frac{R}{R_{сол}} \right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_{сол}} \right)^4 \quad (2.B.1)$$

где L — светимость звезды,

R — радиус звезды,

T — эффективная температура фотосферы звезды,

$T_{сол} = 5778 \text{ К}$ — эффективная температура фотосферы Солнца.

Таблица 2.Б.0а

Зависимость светимости от массы для звезд главной последовательности

Масса $m = M / M_{сол}$	Светимость $l = L / L_{сол}$
>20	$l = 1800 m$
2 – 20	$l = m^{3,5}$
0,43 – 2	$l = m^4$
<0,43	$l = 0,23 m^{2,3}$

Таблица 2.Б.0б

Зависимость массы от светимости для звезд главной последовательности

Светимость l	Масса m
>36000	$m = 5,6 \cdot 10^{-4} l$
11 – 36000	$m = l^{0,29}$
0,034 – 16	$m = l^{0,25}$
<0,034	$m = 4,3 l^{0,43}$

Таблица 2.Б.1. Соответствие между спектральным классом, температурой и абсолютной звёздной величиной [Куликовский, с. 116]

Спектральный класс	Температура, К	Абсолютная звёздная величина									
		Сверхгиганты		Гиганты			Субгиганты	Главная последовательность	Субкарлики	Белые карлики	
		Ia	Ib	II	III	III _{сф}	IV	V	VI	VII	
O5	38000	-7,0	–	–	–	–	–	–	-6,3	–	–
O7	37000	-7,0	–	–	–	–	–	–	-5,9	–	–
O9	31900	-7,0	-6,1	-6,0	-5,9	–	-5,7	–	-5,1	–	–
B0	30000	-7,0	-6,0	-5,9	-5,3	–	-4,8	–	-4,4	–	–
B1	24200	-7,0	-6,0	-5,6	-4,7	–	-4,0	–	-3,4	–	–
B2	22100	-7,0	-6,0	-5,4	-3,9	–	-3,2	–	-2,4	–	–
B3	18800	-7,0	-5,9	-5,2	-3,2	–	-2,5	–	-1,7	–	–
B5	16400	-7,0	-5,8	-4,6	-2,2	–	-1,7	–	-1,0	–	–
B8	13400	-7,0	-5,7	-3,7	-0,9	–	-0,5	–	-0,1	–	+10,7
B9	12400										
A0	10800	-7,0	-5,5	-3,0	-0,4	–	+0,1	–	+0,7	+2,5	+11,2
A1	10200										
A2	9730	-7,0	-5,3	-2,6	+0,2	–	+0,7	–	+1,4	+2,7	+11,7
A3	9260										
A5	8620	-7,0	-4,8	-2,0	+0,9	–	+1,4	–	+2,0	+3,2	+12,4
A7	8190	-7,0	-4,6	-2,0	+1,3	–	+1,8	–	+2,4	+3,5	+12,7
F0	7240	-7,0	-4,5	-2,0	+1,7	–	+2,3	–	+2,8	–	+13,0
F2	6930	-7,0	-4,5	-2,0	+1,9	–	+2,6	–	+3,1	–	
F5	6540										
F6	6450	-7,0	-4,5	-2,0	–	–	+3,1	+2,5	+3,9	–	
F7	6320										
F8	6200	-7,0	-4,5	-2,0	–	+5,0	+3,4	+2,7	+4,2	+5,4	+14,2
G0	5920	-7,0	-4,5	-2,0	–	+4,0	+3,7	+2,9	+4,6	+5,7	+14,4
G2	5780	-7,0	-4,5	-2,0	–	+3,4	+3,9	+3,0	+4,8	+6,0	+14,5
G5	5610	-7,0	-4,5	-2,0	–	+1,8	+4,3	+3,0	+5,2	+6,3	–
G8	5490	-7,0	-4,5	-2,1	+1,8	+0,5	+4,7	+2,8	+5,6	+6,7	–
K0	5240	-7,0	-4,5	-2,1	+1,3	+0,1	+5,0	+2,4	+5,9	+7,0	–
K2	4780	-7,0	-4,5	-2,2	+0,8	-0,6	–	–	+6,3	+7,7	–
K3	4590	-7,0	-4,5	-2,3	+0,6	-0,8	–	–	+6,6	+8,3	+15,0
K5	4410	-7,0	-4,5	-2,4	+0,1	–	–	–	+7,3	+9,5	–
K7	4160										
M0	3920	-7,0	-4,5	-2,4	-0,3	–	–	–	+8,5	+10,5	–
M1	3680	-7,0	-4,5	-2,4	-0,6	–	–	–	+9,1	+11,0	–
M2	3500	-7,0	-4,5	-2,4	-0,8	–	–	–	+9,7	+11,5	–
M3	3360	–	–	-2,4	-1,0	–	–	–	+10,4	+12,0	–
M4	3230	–	–	-2,4	-1,0	–	–	–	+11,1	+12,5	–
M5	3120	–	–	-2,4	-1,1	–	–	–	+12,0	+13,1	–
M6		–	–	-2,4	-1,1	–	–	–	+13,1	+13,9	–
M7		–	–	-2,4	-1,2	–	–	–	+14,4	–	–
M8	2660	–	–	–	–	–	–	–	+16,0	–	–

Эмпирическая формула (аппроксимация по данным таблицы 2.Б.2) для нахождения абсолютной величины по температуре для звезд главной последовательности:

$$M = 6,296 \cdot 10^{-7} x^6 - 8,242 \cdot 10^{-5} x^5 + 4,277 \cdot 10^{-3} x^4 - 0,112 x^3 + 1,557 x^2 - 11,25 x + 34,94 \quad (2.Б.2)$$

где $x = T / 1000$ К. Реальные значения могут отклоняться примерно на 1 зв. вел. в большую или меньшую сторону.

Таблица 2.Б.3

Доля энергии, излучаемой звёздами в разных диапазонах

Спектральный класс	Температура, К	Доля светимости в диапазонах		
		инфракрасном	видимом	ультрафиолетовом
A0	10000	0,12	0,43	0,45
F0	7060	0,35	0,44	0,21
F5	6320	0,40	0,45	0,15
G0	5780	0,45	0,47	0,08
G2	5545	0,50	0,43	0,07
G5	5160	0,55	0,39	0,06
K0	4685	0,62	0,34	0,04
K5	4240	0,67	0,31	0,02
M0	3720	0,76	0,23	0,01
M5	2935	0,82	0,18	0
Коричневый карлик	2000	0,99	0,01	0

В. Время жизни

Время жизни звезды на главной последовательности

$$T = 10 \text{ млрд. лет} \cdot (M / M_{\text{сол}})^{1-n} \quad (2.В.1)$$

где M – масса звезды,

n – показатель, равный

$$n = 4,75 \text{ для звёзд массой } (0,7 \dots 2) \cdot M_{\text{сол}},$$

$$n = 3,75 \cdot (M / M_{\text{сол}}) + 2,125 \text{ для звёзд массой } (0,1 \dots 0,7) \cdot M_{\text{сол}}.$$

Светимость в момент вступления на главную последовательность

$$L_0 = 0,71 L_{\text{сол}} \cdot (M / M_{\text{сол}})^n \quad (2.В.2)$$

Зависимость светимости от времени

$$L(t) = L_0 \cdot e^{(t/T)^{4/3}} \quad (2.В.3)$$

где t – время с момента вступления на главную последовательность.

Другая модель:

Светимость Солнца в прошлом

$$L_{\text{прошл}}(t) = \frac{L_{\text{наст}}}{1 + 0,4 \cdot (1 - t / 4,6 \text{ млрд. лет})} \quad (2.В.4а)$$

где $L_{\text{наст}}$ — светимость Солнца в настоящем,

t — возраст Солнца с момента вступления на главную последовательность,

4,6 млрд. лет — текущий возраст Солнца.

Светимость Солнца в будущем (до схода с главной последовательности)

$$L_{\text{буд}}(t) = L_{\text{наст}} \cdot \left(\frac{5,59 \text{ млрд. лет}}{t} - 1,41 + 0,26 \frac{t}{1 \text{ млрд. лет}} \right) \quad (2.В.4б)$$

Светимость белых карликов массой от 0,55 до 0,65 $M_{\text{сол}}$ [Barnes]

$$\log_{10}(L/L_{\text{сол}}) = -2,478 - 0,7505t + 0,1199t^2 - 6,686 \cdot 10^{-3}t^3 \quad (2.В.5)$$

где t — время (в млрд. лет) с момента превращения звезды в белый карлик.

3. ПЛАНЕТЫ

А. Размер орбиты

Обобщённое правило Тициуса-Боде

(эмпирическая формула)

$$a \approx a_0 + b \cdot 2^k \quad (3.A.1)$$

где a – большая полуось орбиты планеты (а. е.),

a_0, b – параметры планетной системы,

k – порядковый параметр планеты: $k = -\infty, 0, 1, 2, \dots$

Для Солнечной системы

$$a \approx 0,4 + 0,3 \cdot 2^k \quad (3.A.2)$$

Таблица 3.A.1

Планета	k	a (согласно правилу)	a (в действительности)
Меркурий	$-\infty$	0,4	0,39
Венера	0	0,7	0,72
Земля	1	1,0	1,00
Марс	2	1,6	1,52
Церера	3	2,8	2,77
Юпитер	4	5,2	5,20
Сатурн	5	10,0	9,54
Уран	6	19,6	19,2
Плутон	7	38,8	39,44

Орбита Нептуна не соответствует правилу.

Максимальный допустимый радиус стабильной орбиты соседней планеты или астероида, расположенного ближе к звезде, чем данная

$$r_{\text{int}} = a \left[(1 - \epsilon) - n_{\text{int}} \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \right] \quad (3.A.3a)$$

Минимальный допустимый радиус стабильной орбиты соседней планеты, расположенной дальше от звезды, чем данная

$$r_{\text{ext}} = a \left[(1 + \epsilon) + n_{\text{ext}} \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \right] \quad (3.A.3b)$$

где a – большая полуось орбиты данной планеты,

ϵ — эксцентриситет орбиты данной планеты,

m – масса данной планеты,

M – масса звезды,

$n_{\text{int}}, n_{\text{ext}}$ – коэффициенты, зависящие от эксцентриситета.

Рис. 3.А.1

Чертеж к формулам 3.А.3а-б

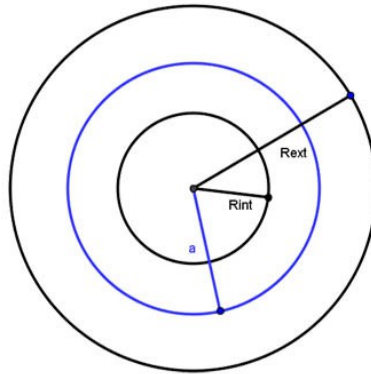
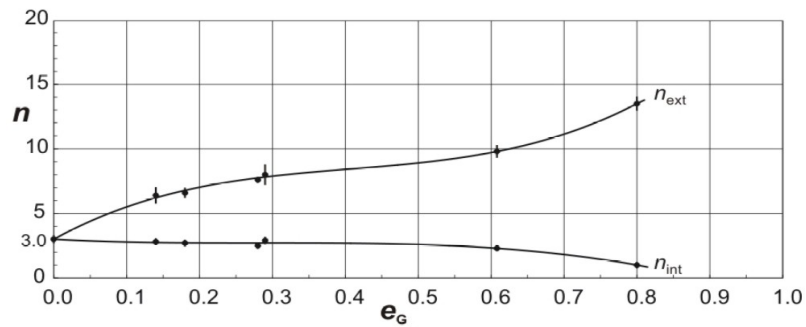


Рис. 3.А.2

График для нахождения коэффициентов n_{int} , n_{ext}



Внутренний и внешний радиусы обитаемой зоны (наименьшее и наибольшее расстояния планеты от звезды, на которых планета пригодна для жизни)

$$r_{min} = 1 a. e. \cdot \sqrt{\frac{L/L_{сол}}{S_1(T)}}, \quad r_{max} = 1 a. e. \cdot \sqrt{\frac{L/L_{сол}}{S_2(T)}} \quad (3.А.4а-б)$$

где L – светимость звезды,

S_1, S_2 – функции температуры звезды (в кельвинах):

$$\begin{aligned} S_1(T) &= 4,190 \cdot 10^{-8} T^2 - 2,139 \cdot 10^{-4} T + 1,296 \\ S_2(T) &= 6,190 \cdot 10^{-9} T^2 - 1,139 \cdot 10^{-5} T + 0,2341 \end{aligned} \quad (3.А.4в-г)$$

Формулы 3.А.3-4 и рис. 3.А.2 взяты из работы [Jones].

Другая модель [Barnes]

$$\begin{aligned} r_{min} &= [r_{min0} - 2,7619 \cdot 10^{-5} \cdot (T - T_{сол}) a. e. - 3,8095 \cdot 10^{-9} \cdot (T - T_{сол})^2 a. e.] (L/L_{сол})^{1/2} (1 - \epsilon^2)^{-1/4} \\ r_{max} &= [r_{max0} - 13,786 \cdot 10^{-5} \cdot (T - T_{сол}) a. e. - 1,4286 \cdot 10^{-9} \cdot (T - T_{сол})^2 a. e.] (L/L_{сол})^{1/2} (1 - \epsilon^2)^{-1/4} \end{aligned} \quad (3.А.5а-б)$$

где $T_{сол}$ — температура Солнца (принятое в формуле значение — 5700 К),

r_{min0}, r_{max0} – внутренний и внешний радиусы обитаемой зоны в Солнечной системе.

Радиус орбиты, на которой планета получает от звезды столько же энергии, сколько Земля от Солнца (эффективный радиус)

$$r = 1 \text{ а. е.} \cdot \sqrt{L/L_{\text{сол}}} \quad (3.A.6)$$

Радиус «идеальной» орбиты (при котором планета максимальное время проводит в экосфере)

$$r = 1,16 \text{ а. е.} \cdot (M/M_{\text{сол}})^{n/2} \quad (3.A.7)$$

где M – масса звезды ($M_{\text{сол}}$),

n – показатель, равный

$$n = 4,75 \text{ для звёзд массой } (0,7 \dots 2) \cdot M_{\text{сол}},$$

$$n = 3,75 \cdot (M/M_{\text{сол}}) + 2,125 \text{ для звёзд массой } (0,1 \dots 0,7) \cdot M_{\text{сол}}.$$

Б. Эксцентриситет

Расстояние от планеты до звезды в произвольной точке орбиты

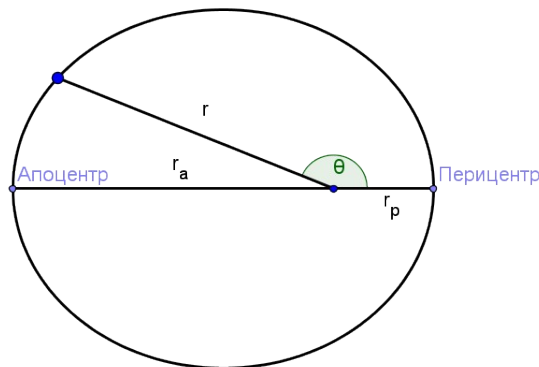
$$r = a \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (3.B.1a)$$

где ϵ – эксцентриситет,

θ – истинная аномалия (гелиоцентрическая угловая полярная координата).

Рис. 3.Б.1

Эллиптическая орбита



Расстояние до звезды в перицентре и апоцентре

$$r_p = a (1 - \epsilon) \quad (3.B.1б)$$

$$r_a = a (1 + \epsilon) \quad (3.B.1в)$$

Эксцентриситет и большая полуось, выраженные через расстояния в перигелии и афелии

$$\epsilon = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (3.B.1г)$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \quad (3.Б.1д)$$

Орбитальная скорость в произвольной точке орбиты

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (3.Б.2а)$$

В удобных единицах

$$\begin{aligned} v &= 29,780 \text{ км/с} \cdot \sqrt{\frac{M}{M_{\text{сол}}} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \cdot 1 \text{ а. е.} = \\ &= 19,961 \text{ км/с} \cdot \sqrt{\frac{M}{M_{\text{зем}}} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \cdot 1 \text{ тыс. км} \end{aligned} \quad (3.Б.2б)$$

Орбитальные скорости в перигелии и афелии

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \quad (3.Б.3а)$$

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \quad (3.Б.3б)$$

Эти скорости могут быть выражены в удобных единицах с теми же коэффициентами, что в формуле (3.Б.2а).

Компоненты вектора скорости в произвольной точке орбиты:

Трансверсальная

$$v_\theta = v_p r_p / r \quad (3.Б.3в)$$

Радиальная

$$v_r = \pm \sqrt{v^2 - v_\theta^2} \quad (3.Б.3г)$$

где знак плюс ставится при $\theta < \pi$ (удаление от звезды), знак минус при $\theta > \pi$ (приближение к звезде).

В. Орбитальный период

Обобщённый третий закон Кеплера

$$\left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 = \frac{a^3}{G \cdot (M + m)} \quad (3.В.1а)$$

где P – орбитальный период,

a – большая полуось,

M, m – массы звезды и планеты.

Третий закон Кеплера, выраженный в удобных единицах (пренебрегая массой планеты по сравнению с массой звезды)

$$P = 1 \text{ год} \cdot \sqrt{\frac{(a/1 \text{ a. e.})^3}{M/M_{\text{сол}}}} \quad (3.В.16)$$

Синодический период двух планет (время, через которое повторяется их взаимное расположение)

$$1/S = |1/P_1 - 1/P_2| \quad (3.В.2)$$

где P_1, P_2 – сидерические периоды (находимые по закону Кеплера).

Время прохождения по орбите от перицентра до заданной точки:

$$t = P \cdot \frac{E - \epsilon \sin E}{2\pi} \quad (3.В.3a)$$

где ϵ — эксцентриситет,

E — эксцентрическая аномалия:

$$E = \arccos \frac{1-r/a}{\epsilon} = \arccos \frac{\epsilon + \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (3.В.3б),$$

r – расстояние от звезды до заданной точки,

θ – истинная аномалия заданной точки.

Г. Осевой период

Период осевого вращения без учёта приливного торможения

(эмпирическая формула)

$$p \approx 1 \text{ сут} \cdot C \frac{R}{R_{\text{зем}}} \sqrt{\frac{j}{M/M_{\text{зем}}}} \quad (3.Г.1)$$

где R – средний радиус планеты,

M – масса планеты,

j – безразмерный момент инерции планеты (чем сильнее концентрация массы к центру планеты, тем он ниже),

C – параметр планетной системы: для Солнечной системы $C = 1,11$.

Таблица 3.Г.1

Безразмерные моменты инерции тел Солнечной Системы

Тело	Безразмерный момент инерции	Тело	Безразмерный момент инерции
Однородный шар	0,4	Марс	0,366
Меркурий	0,33	Юпитер	0,254
Венера	0,33	Сатурн	0,210
Земля	0,3308	Уран	0,225
Луна	0,394	Нептун	?

Солнечные сутки

$$1/s = 1/p - 1/P \quad (3.Г.2)$$

где p – звёздные сутки, вычисляемые по (3.Г.1),

P – орбитальный период.

Если $s = \infty$, то вращение планеты синхронизировано (обращена всегда одной стороной к светилу); если $s < 0$, то вращение обратное (светило движется по небу противоположно вращению звёздной сферы).

Д. Масса, плотность, тяготение

Средняя плотность планеты в зависимости от радиуса, г/см³

(эмпирическая формула для земноподобных планет)

$$\rho \approx 2,77 \text{ г/см}^3 \cdot e^{0,6904 R/R_{\text{зем}}} \quad (3.Д.1)$$

где R – средний радиус планеты.

Теоретическая зависимость радиуса от массы для твердых планет [Seager]

$$\log_{10} \frac{R}{R_1} = k_1 + \frac{1}{3} \log_{10} \frac{M}{M_1} - k_2 \left(\frac{M}{M_1} \right)^{k_3} \quad (3.Д.1а)$$

где R, M — радиус и масса планеты,

R_1, M_1, k_1, k_2, k_3 — коэффициенты, зависящие от химического состава планеты.

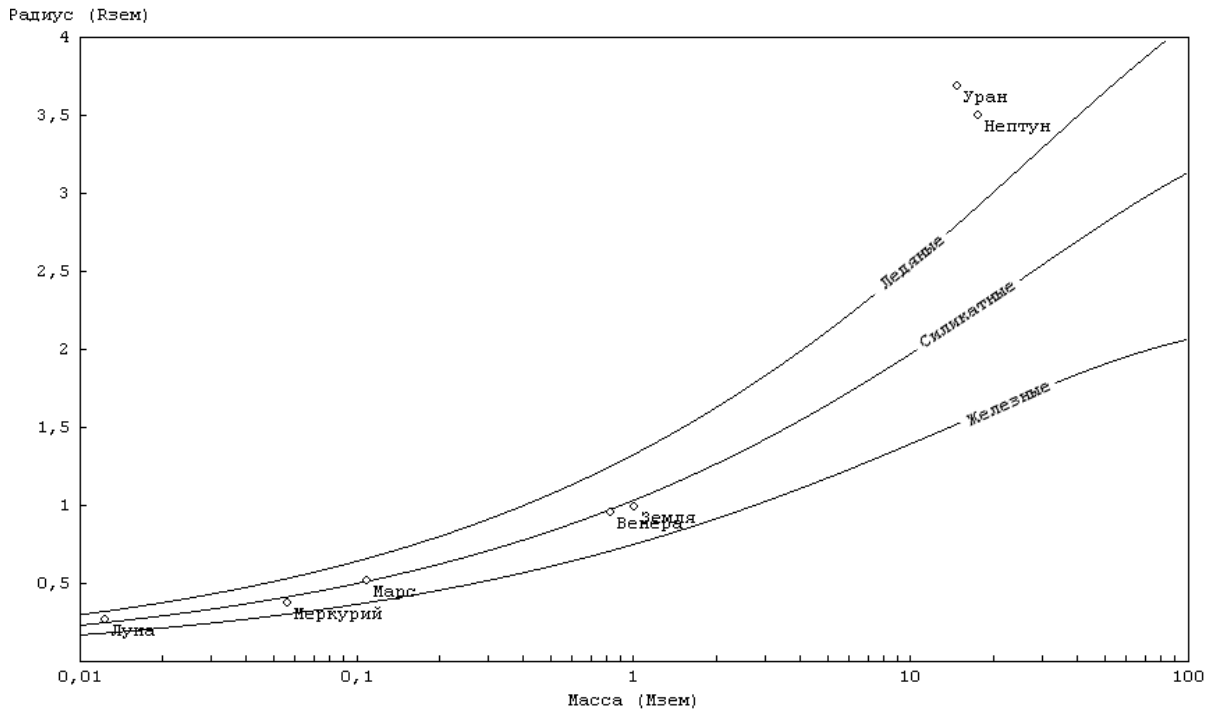
Таблица 3.Д.1

Коэффициенты в формуле 3.Д.1а

Состав планеты	$M_1 / M_{\text{зем}}$	$R_1 / R_{\text{зем}}$	k_1	k_2	k_3
Для $M/M_1 > 4$					
Железо	5,80	2,52	-0,20949	0,0804	0,394
Силикат магния	10,55	3,90	-0,209594	0,0799	0,413
Водяной лёд	5,52	4,43	-0,209396	0,0807	0,375
Для $M/M_1 < 4$					
Железо	4,34	2,23	-0,20945	0,0804	0,394
Силикат магния	7,38	3,58	то же		
Водяной лёд	8,16	4,73	то же		
70 % железа + 30 % силиката	6,41	2,84	то же		
32,5 % железа + 67,5 % силиката	6,41	3,19	то же		
22,5 % железа + 52,5 % силиката + 25 % льда	6,41	3,63	то же		
6,5 % железа + 48,5 % силиката + 45 % льда	6,88	4,02	то же		
3 % железа + 22 % силиката + 75 % льда	7,63	4,42	то же		

Рис. 3.Д.2

Теоретическая зависимость радиус-масса для твёрдых планет



Теоретическая зависимость радиуса от массы для газовых планет [Grießmeier]

$$R = 1,47 R_{\text{юп}} \cdot \frac{(M/M_{\text{юп}})^{1/3}}{1 + \left(\frac{M/M_{\text{юп}}}{3,16}\right)^{2/3}} \cdot \left[1 + 0,05 \left(\frac{T}{T_0}\right)^y\right] \quad (3.Д.16)$$

где R , M – радиус и масса планеты,

T — эффективная температура; см. формулы (4.В.1-2),

$$T_0 = 764 (M/M_{\text{юп}})^{0,28},$$

$$y = 1,15 + 0,05 \cdot \left(\frac{0,59}{M/M_{\text{юп}}}\right)^{1,03}.$$

Зависимость радиуса от массы для коричневых карликов

$$R \approx R_{\text{юп}} (M/M_{\text{юп}})^{-1/8} \quad (3.Д.1в)$$

Ускорение свободного падения (на сферической не вращающейся планете)

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot \frac{M/M_{\text{зем}}}{(R/R_{\text{зем}})^2} = 1,78 \text{ м/с}^2 \cdot \frac{\rho}{1 \text{ г/см}^3} \cdot \frac{R}{R_{\text{зем}}} \quad (3.Д.3)$$

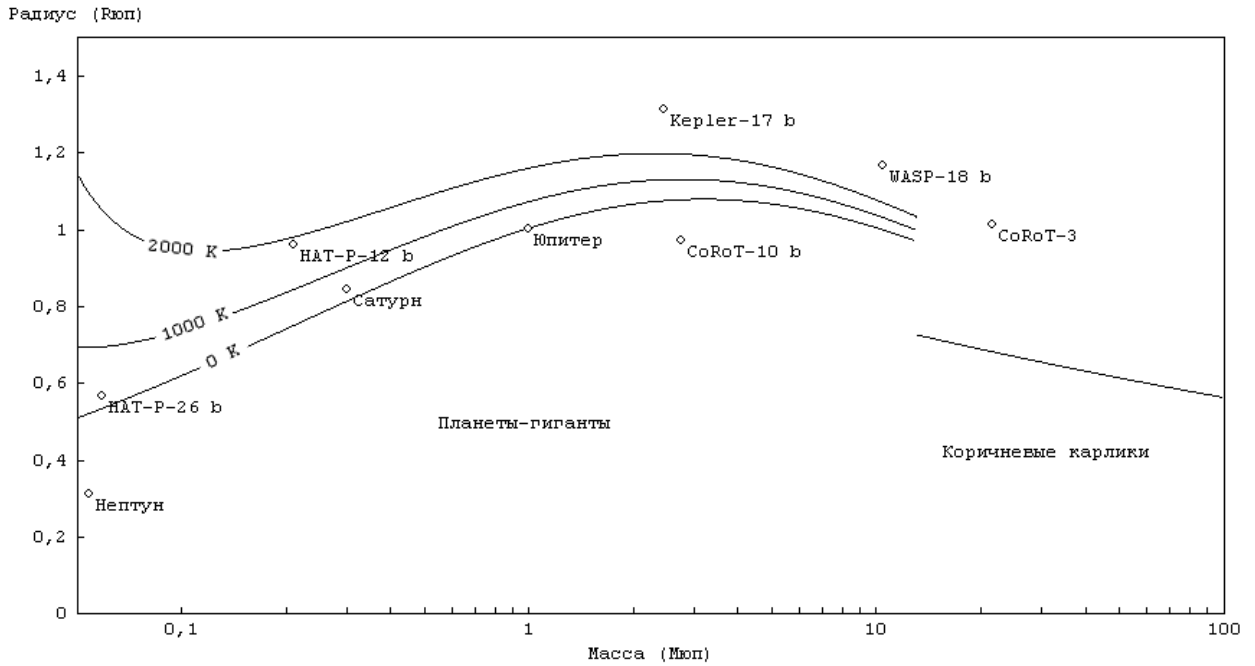
Космические скорости

$$v_I = \sqrt{g R} \quad \text{— первая (круговая)} \quad (3.Д.4а)$$

$$v_{II} = \sqrt{2 g R} \quad \text{— вторая (параболическая)} \quad (3.Д.4б)$$

Рис. 3.Д.2

Теоретические зависимости радиус-масса для газовых гигантов (с изолиниями эффективной температуры) и коричневых карликов



Е. Альbedo и яркость

Абсолютная визуальная звёздная величина планеты (видимая величина, которую планета имела бы при наблюдении со звезды на расстоянии 1 а. е.), и её связь с диаметром планеты

$$H = (M^{m_{13}} - 4,82) + 15,61 - 5 \log_{10} \left(\frac{D}{1 \text{ км}} \cdot \sqrt{A} \right) \quad (3.E.1a)$$

$$D = \frac{1324 \text{ км}}{\sqrt{A}} \cdot 10^{0,2(M^{m_{13}} - 4,82 - H)} \quad (3.E.16)$$

где $M^{m_{13}}$ — абсолютная визуальная величина звезды,

4,82 — абсолютная визуальная величина Солнца,

A — геометрическое альbedo планеты,

D — диаметр планеты.

Видимая звёздная величина планеты

$$m = H + 5 \log_{10} \left(\frac{d_H}{1 \text{ а. е.}} \right) \left(\frac{d_3}{1 \text{ а. е.}} \right) - 2,5 \log_{10} p(\chi) \quad (3.E.2)$$

где d_H — расстояние от наблюдателя до планеты,

d_3 – расстояние от звезды до планеты,

χ – фазовый угол (угол между отрезками планета-звезда и планета-наблюдатель),

$p(\chi)$ – фазовый интеграл.

Рис. 3.Е.1

Чертеж к формулам 3.Е.2-3

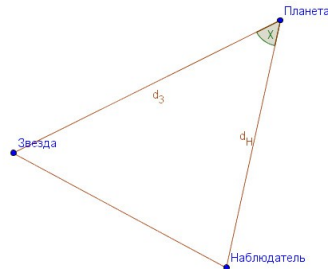
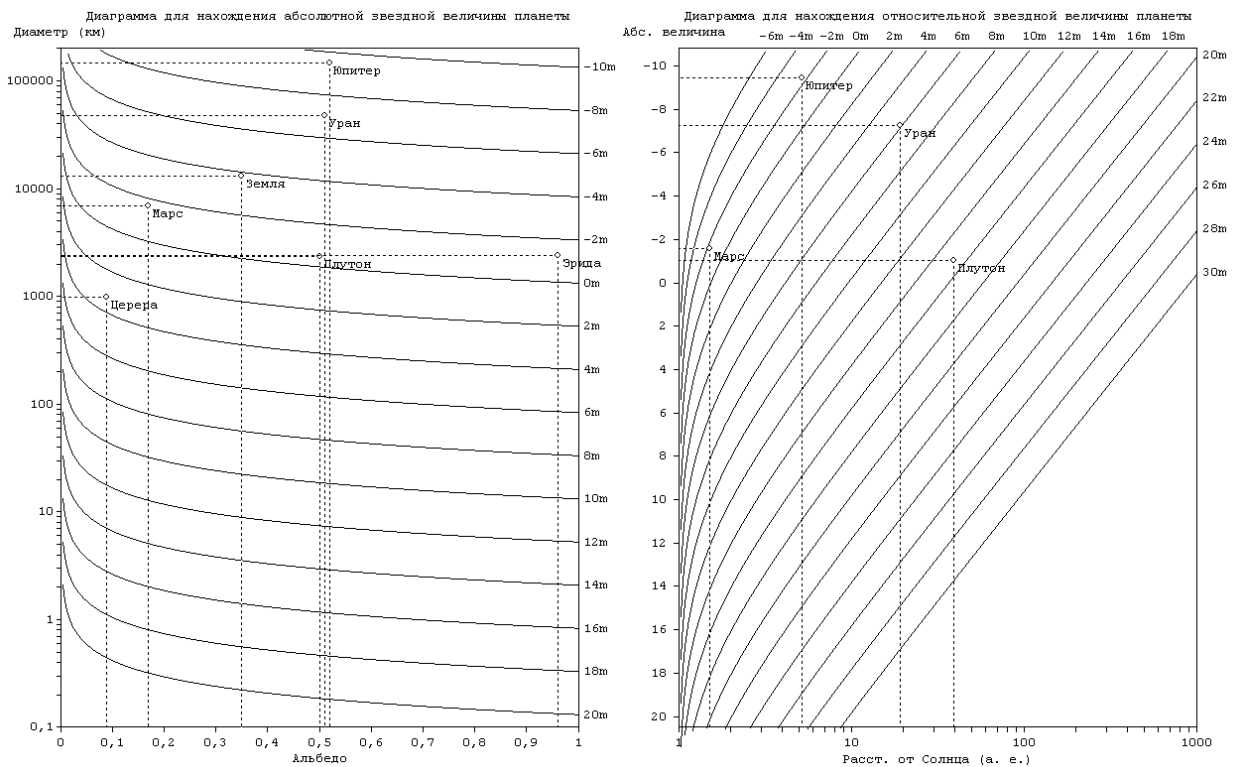


Рис. 3.Е.2

Диаграммы для нахождения абсолютной и относительной звёздной величины планеты.



По левой диаграмме определяется абсолютная величина через альbedo и диаметр, по правой — относительная величина (для наблюдателя на Земле в противостоянии, $\chi = 0$) через расстояние до Солнца и абсолютную величину.

Фазовый интеграл идеальной отражающей сферы (сферы Ламберта)

$$p_{\text{Ламберт}}(\chi) = \left(1 - \frac{\chi}{\pi}\right) \cos \chi + \frac{1}{\pi} \sin \chi \quad (3.Е.3a)$$

Для реальной планеты

$$p(\chi) \approx \frac{2}{3} P_{\text{Ламберт}}(\chi) \quad (3.Е.36)$$

Ж. Спутники

Закон Дермотта для систем из многих спутников (эмпирическая формула)

$$P_n = P_0 C^n \quad (3.Ж.1)$$

где P_n – период обращения n -го спутника,

P_0 и C – параметры системы:

Таблица 3.Ж.1

Параметры в законе Дермотта

Планета	P_0 , сут	C
Юпитер	0,444	2,03
Сатурн	0,462	1,59
Уран	0,513	1,73
Нептун	0,488	2,24

Большая полуось орбиты спутника

$$a_{sat} = 42164 \text{ км} \cdot \sqrt[3]{\frac{m + m_{sat}}{M_{зем}} \cdot \left(\frac{P_{sat}}{1 \text{ сут}}\right)^2} \quad (3.Ж.2)$$

где P_{sat} – период спутника,

m , m_{sat} – массы планеты и спутника.

Радиус Хилла (максимальное допустимое расстояние от планеты до спутника)

$$r_H \approx a(1 - \epsilon) \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} \quad (3.Ж.3)$$

где a – большая полуось орбиты планеты,

ϵ – её эксцентриситет,

m – масса планеты,

M – масса звезды.

Орбита спутника может быть стабильной на расстоянии не более $0,53 r_H$ от планеты (при прямом вращении) или $0,69 r_H$ (при обратном вращении).

Синодический период (промежуток времени между двумя одинаковыми фазами)

$$1/S_{sat} = 1/P_{sat} - 1/P \quad (3.Ж.4)$$

где P и P_{sat} – орбитальные периоды планеты и спутника. Если $1/S_{sat} = 0$, то спутник всегда в одной фазе; если $S_{sat} < 0$, смена фаз происходит в обратном направлении.

Радиус геосинхронной орбиты (на которой спутник висит над одной и той же точкой планеты)

$$r_{\text{геосинхр}} = \sqrt[3]{G(m + m_{\text{sat}}) \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2} = 42164 \text{ км} \cdot \sqrt[3]{\frac{m + m_{\text{sat}}}{M_{\text{зем}}} \cdot \left(\frac{p}{1 \text{ сут}}\right)^2} \quad (3.Ж.4а)$$

где p – период осевого вращения планеты.

Точки Лагранжа (точки равновесия для третьего тела в поле тяготения планеты и спутника, см. рис. 3.Ж.1).

Расстояние от L1 и L2 до спутника (приблизительная формула для случая, когда планета значительно массивнее спутника: $\mu = m_{\text{sat}}/m \ll 1$)

$$r_{1,2} \approx r \sqrt[3]{\mu/3} \quad (3.Ж.5а)$$

где r — радиус орбиты спутника.

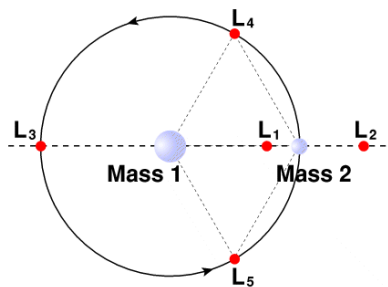
Расстояние от L3 до планеты

$$r_3 \approx r(1 + \mu/12) \quad (3.Ж.5б)$$

Рис. 3.Ж.1

Точки Лагранжа

(Mass 1 — планета, Mass 2 — спутник)



Точные уравнения для нахождения r_1, r_2, r_3 (для любого μ):

$$\mu x_1^5 - 3\mu x_1^4 + 3\mu x_1^3 - x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0 \quad (3.Ж.6а)$$

$$\mu x_2^5 + 3\mu x_2^4 + 3\mu x_2^3 - x_2^2 - 2x_2 - 1 = 0 \quad (3.Ж.6б)$$

$$\mu x_3^5 + 2\mu x_3^4 + \mu x_3^3 - (\mu + 1)x_3^2 - 2\mu x_3 - \mu = 0 \quad (3.Ж.6в)$$

где $x_i = r_i / r$ для $i = 1, 2, 3$.

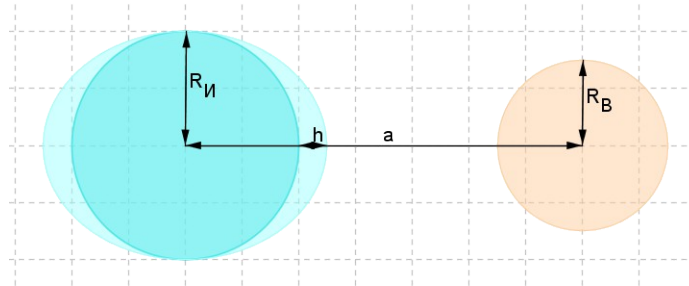
L4 и L5 лежат в вершинах равносторонних треугольников, основанием которых служит отрезок планета-спутник. Тело, помещенное в одну из этих точек, может оставаться в устойчивом равновесии, если отношение масс спутника и планеты $\mu < 1/24,96$.

3. Приливы

Пусть И – тело, испытывающее приливы, В – тело, вызывающее приливы (см. рис. 3.3.1).

Рис. 3.3.1

Приливная деформация тела И под действием тела В



Высота приливов на И

$$h = 4,6 h_{зем} \cdot \left(\frac{M_B}{M_I} \right) \left(\frac{R_I}{R_{зем}} \right)^4 \left(\frac{a}{1 \text{ млн. км}} \right)^{-3} \quad (3.3.1)$$

где h_3 – высота приливов на Земле (в открытом глубоком океане $h_3 \approx 30$ см),

a – расстояние между И и В,

M_I, M_B – массы тел И и В,

R_I – радиус тела И.

Предел Роша для твёрдого (недеформируемого) шара

$$d_r = R_B \sqrt[3]{2 \rho_B / \rho_I} \quad (3.3.2a)$$

где d_r – расстояние между И и В, ближе которого приливная сила, создаваемая В, превосходит самогравитацию И,

ρ_B, ρ_I – плотности В и И.

Предел Роша для жидкого (деформируемого) шара

$$d_r \approx 2,44 R_B \sqrt[3]{\rho_B / \rho_I} \quad (3.3.2b)$$

Находясь на этом расстоянии, деформируемый шар вытягивается, принимая эксцентриситет фигуры $e = 0,88303$ (отношение полуосей $a / b \approx 2,13$, см. раздел 3.И).

Время, за которое приливное трение тормозит тело И с начальной угловой скорости ω_0 до конечной ω [Grieffmeier]

$$T = \frac{2}{3G} \frac{a^6}{R_I^3} \frac{M_I}{M_B^2} \frac{j_I Q_I}{k_I} (\omega_0 - \omega) \quad (3.3.3a)$$

где j_I – безразмерный момент инерции тела И,

Q_I – коэффициент диссипации приливной энергии; для Юпитера Q_I лежит между $6,6 \cdot 10^4$ и $2 \cdot 10^6$,

k_{II} – число Лява тела И; для Юпитера $k_{II} = 0,5$, для Сатурна $k_{II} = 0,3$; для Земли и Марса известны отношения $Q_{II}/k_{II} \approx 500$ и 700 соответственно.

В удобных единицах

$$T = 1,5 \text{ млрд. лет} \cdot \left(\frac{a}{1 \text{ а. е.}} \right)^6 \left(\frac{M_B}{M_{\text{сол}}} \right)^{-2} \left(\frac{M_{II}}{M_{\text{зем}}} \right) \left(\frac{R_{II}}{R_{\text{зем}}} \right)^{-3} \cdot \frac{j_{II} Q_{II}}{k_{II}} \cdot \left(\frac{1 \text{ сут}}{p_0} - \frac{1 \text{ сут}}{p} \right) \quad (3.3.36)$$

где p_0, p — начальный и конечный периоды осевого вращения планеты.

Чтобы найти время полной синхронизации, нужно подставить вместо p период орбитального вращения тела И.

И. Планеты как эллипсоиды

Сжатие эллипсоида

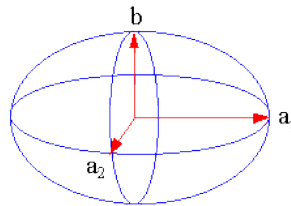
$$f = 1 - b/a \quad (3.И.1)$$

где a – экваториальная полуось эллипсоида (для эллипсоидов вращения, какими являются планеты, обе экваториальные полуоси равны: $a_1 = a_2$),

b – полярная полуось (параллельная оси вращения).

Рис. 3.И.1

Эллипсоид



Эксцентриситет фигуры

$$e = \sqrt{1 - (b/a)^2} \quad (3.И.2)$$

Объём

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - f) = \frac{4}{3} \pi a_1 a_2 b \quad (3.И.3а)$$

Средний волуметрический радиус (радиус сферы того же объёма)

$$R = a^3 \sqrt{1 - f} = \sqrt[3]{a_1 a_2 b} \quad (3.И.3б)$$

Площадь поверхности (для случая $a_1 = a_2 > b$)

$$S = 2 \pi a^2 \left(1 + \frac{1 - e^2}{2e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right) \quad (3.И.4а)$$

Для малых e

$$S \approx 2 \pi (a^2 + b^2) \quad (3.И.4б)$$

Расстояние между центром эллипсоида и точкой на его поверхности с широтой φ

$$r(\varphi) = a \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \varphi}} \quad (3.И.5)$$

Гравитация на поверхности эллипсоида на широте φ (формула Клеро)

$$g(\varphi) = g_e \left[1 + \left(\frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_e} - f \right) \sin^2 \varphi \right] \quad (3.И.6)$$

где g_e — ускорение силы тяжести на экваторе,

ω — угловая скорость вращения планеты.

Угловая скорость вращения однородного эллипсоида вращения с плотностью ρ , находящегося в гидростатическом равновесии (фигуры Маклорена)

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = W = \frac{3-2e^2}{e^3} \sqrt{1-e^2} \arcsin e - \frac{3}{e^2} (1-e^2) \quad (3.И.8а)$$

Приближённая обратная формула

$$e \approx 1,8704 W^{0,4943} \quad (3.И.8б)$$

В удобных единицах, для небольших угловых скоростей

$$e \approx 5 \cdot \left(\frac{p}{1 \text{ ч}} \right)^{-1} \left(\frac{\rho}{1 \text{ г/см}^3} \right)^{-1/2} \quad (3.И.8в)$$

где p — осевой период вращения.

При $e \geq 0,81267$ и соотв. $W \geq W_{max} = 0,18712$ фигура Маклорена перестаёт быть устойчивой. Фигурой равновесия становится эллипсоид Якоби с $a_1 \neq a_2$. Для него угловая скорость понижается с ростом эксцентриситета, т. е. никакая равновесная фигура не может иметь угловую скорость вращения выше ω_{max} :

$$\omega_{max} = \sqrt{2\pi G\rho W_{max}} = 8,86 \cdot 10^{-6} \sqrt{\rho} \quad (3.И.9а)$$

Минимально возможный период вращения (в удобных единицах)

$$p_{min} = 2\pi / \omega_{max} = 6,23 \text{ ч} \cdot \sqrt{\frac{1 \text{ г/см}^3}{\rho}} \quad (3.И.9б)$$

К. Столкновения с астероидами

Почти все формулы этого раздела взяты из работы [Collins].

Количество околоземных астероидов диаметром больше L

$$N_{>L} \approx 1148 \cdot (L / 1 \text{ км})^{-2,354} \quad (3.К.1)$$

Средний промежуток времени (в годах) между падениями астероидов с энергией выше E мегатонн (три разные оценки)

$$T_{>E} \approx 33 \cdot E^{0,8} \text{ (или)} 136 \cdot E^{0,9} \text{ (или)} 109 \cdot E^{0,78} \quad (3.К.2а-в)$$

Условие разрушения импактора (астероида, метеороида или кометы) в атмосфере:

$$4,07 \frac{C_d h_0 Y}{\rho_i L v_0^2 \sin \theta} < 1 \quad (3.К.3а)$$

где C_d — коэффициент трения; для импакторов неправильной формы $C_d = 2$;

h_0 — высота, на которой плотность атмосферы уменьшается в e раз; для изотермической атмосферы Земли $h_0 \approx 8000$ м (см. формулу 4.Б.3а);

Y — предел прочности импактора (в Па):

$$\log_{10} Y \approx 2.107 + 0.0624 \sqrt{\rho_i} \quad (3.К.3б);$$

ρ_i — плотность импактора (кг/м^3). Типичные значения для каменных метеороидов 2000-3000 кг/м^3 , для железных 8000 кг/м^3 , для ледяных комет 500-1500 кг/м^3 ;

v_0 — скорость входа в атмосферу. Типичные значения для астероидов 12-20 км/с, для комет 30-70 км/с;

θ — угол входа в атмосферу (отсчитывается от горизонтали); наиболее вероятное значение 45° .

Если условие 3.К.3а не выполняется, импактор долетает до Земли неразрушенным.

Скорость при ударе о землю

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{3 \rho_B C_d h_0}{4 \rho_i L \sin \theta} \quad (3.К.4)$$

где ρ_B — плотность воздуха у поверхности.

Немедленно после падения образуется переходный кратер, размеры которого (км):

$$D_t = 1,161 g^{-0,22} \left(\frac{\rho_i}{\rho_g} \sin \theta \right)^{1/3} L^{0,78} v^{0,44} \quad (3.К.5а)$$

$$d_t = D_t / 2 \sqrt{2} \quad (3.К.5б)$$

$$h_t = D_t / 14,1 \quad (3.К.5в)$$

где D_t — диаметр кратера, измеренный по внутреннему склону вала,

d_t — глубина кратера, измеренная от уровня земли до столкновения,

h_t — высота вала,

ρ_g — плотность грунта в месте удара.

После осыпания стенок переходного кратера образуется финальный кратер. При диаметре переходного кратера $D_t < 3,2$ км размеры финального кратера рассчитываются по формулам

$$D_f = 1,25 D_t \quad (3.К.6а)$$

$$t = 0,0896 D_f (1 + h_f / d_t) \quad (3.К.6б)$$

$$h_f = D_f / 34,9 \quad (3.К.6в)$$

$$d_f = d_t + h_f - t \quad (3.К.6г)$$

где D_f — диаметр финального кратера,

t — толщина слоя осыпи на дне,

h_f — высота вала,

d_f — глубина кратера.

Если диаметр переходного кратера $D_t > 3,2$ км, то размеры финального кратера

$$D_f = D_t^{1,13} \quad (3.К.7а)$$

$$d_f = 0,4 D_f^{0,3} \quad (3.К.7б)$$

Отклонение астероида с целью предотвратить столкновение [Izzo]

Если за N оборотов астероида до столкновения изменить его орбитальную энергию, то расстояние наибольшего сближения между астероидом и Землёй изменится на величину

$$\Delta d_{min} = N \gamma \frac{6\pi}{\mu} \Delta E \sqrt{a^5 / a_3} \quad (3.К.8а)$$

где γ — параметр орбиты астероида (см. ниже),

μ — гравитационный параметр Солнца,

ΔE — изменение удельной энергии астероида,

a — большая полуось орбиты астероида,

a_3 — большая полуось орбиты Земли.

В удобных единицах

$$\Delta d_{min} = 3,18 \text{ км} \cdot N \gamma \left(\frac{a}{1 \text{ а. е.}} \right)^{5/2} \cdot \frac{\Delta E}{1 \text{ Дж/кг}} \quad (3.К.8б)$$

Таблица К.1

Параметры γ и a для некоторых околоземных астероидов

Астероид	γ	Большая полуось, а.е.	$\gamma a^{5/2}$
2004 GG21	0,9997	2,2837	7,88
2004 JA27	0,7416	1,6658	2,66
2004 HF12	0,9908	2,1377	6,62
2004 VA	0,9572	1,9018	4,77
Нерей	0,7981	1,4886	2,16
Икар	0,653	1,078	0,79
Аполлон	1	1,471	2,62

Л. Химический состав планет

Таблица Л.1

Основные свойства наиболее распространённых в космосе элементов и соединений

Вещество	Мол. масса	Температуры плавления и кипения при p = 1 атм		Тройная точка, температура и давление		Критическая точка, температура и давление	
		T плав., К	T кип., К	T, К	p, кПа	T, К	p, кПа
Водород H ₂	2	14,01	20,28	13,8	7,042	33	1293
Гелий He	4	-	4,22	2,19	5,1	5,19	227
Углерод (графит) C	12	3948	4300	3900	10100		
Метан CH ₄	16	90,6	111,55	90,1	11,7	190,5	4600
Аммиак NH ₃	17	195,42	239,81	195,4	6,06	405,5	11300
Вода H ₂ O	18	273,15	373,15	273,16	0,6117	647	22100
Неон Ne	20,2	24,56	27,07	24,56	43	44,4	2760
Магний Mg	24,3	923	1363				
Азот N ₂	28	63,15	77,36	63,15	12,5	126,21	3390
Кремний Si	28	1687	2628				
Угарный газ CO	28	68	81	67,9	15,35	132,7	3498
Этан C ₂ H ₆	30	90,34	184,5	91	0,001	305,3	4900
Кислород O ₂	32	54,36	90,2	54,36	0,152	154,59	5043
Сера S	32	388,36	717,8			1314	20700
Сероводород H ₂ S	34,1	190,85	212,87			373,2	8937
Соляная кислота HCl	36,5	158,8	187,9	158,96	13,9	324,5	8258
Аргон Ar	39,9	83,8	87,3	83,8	68,9	150,87	4898
Углекислый газ CO ₂	44	-	195*	216,58	518,5	304,18	7380
Оксид диазота N ₂ O	44	182,29	184,67	182,34	87,85	309,55	7245
Диоксид азота NO ₂	46	261,95	293,25			431	10132
Озон O ₃	48	80,7	161,3	80,6	0,00114	261	5573
Железо Fe	55,8	1811	3134				
Кремнезём SiO ₂	60,1	1923	2503				
Диоксид серы SO ₂	64,1	200,75	263	197,69	1,67	430,8	7884
Хлор Cl ₂	70,9	171,6	239,11			416,9	7991
Триоксид серы SO ₃	80,1	290	318				
Гематит Fe ₂ O ₃	159,7	1838**	-				

* Сублимация.

** Химическое разложение.

Таблица Л.1 (продолжение)

Вещество	Стандартные энтальпии плавления, кипения и образования, кДж/моль			Плотность твёрдой и жидкой фаз, кг/м ³		Разность молярных объёмов жидкой и твёрдой фаз, см ³ / моль
	$\Delta H_{\text{плав}}$	$\Delta H_{\text{кип}}$	$\Delta H_{\text{обр}}$	$\rho_{\text{тв}}$	$\rho_{\text{ж}}$	
Водород Н ₂	0,117	0,904	-		70,973	
Гелий He	0,014	0,083	-	-	124,96	-
Углерод (графит) С	100	715	-	2267		
Метан СН ₄	1,1	8,17	74,9	423	422,6	0,04
Аммиак NH ₃	5,653	23,35	46,1 (газ)		682	
Вода Н ₂ О	6,01	40,68	241,8 (газ)	920	1000	-1,57
Неон Ne	0,335	1,71	-		1207	
Магний Mg	8,48	128	-	1738	1584	1,36
Азот N ₂	0,360	5,560	-		808,6	
Кремний Si	50,21	359	-	2330	2570	-1,12
Угарный газ СО	0,78	6,01	110,5		788,6	
Этан С ₂ Н ₆	2,85	14,7	83,9		546,49	
Кислород О ₂	0,444	6,82	-		1141	
Сера S	1,727	45	-	1960	1819	1,27
Сероводород Н ₂ S	2,37	18,66	20,6		914,9	
Соляная кислота HCl	1,99	16,16	92,3		1191	
Аргон Ar	1,18	6,43	-		1392,8	
Углекислый газ СО ₂	8,647	25,13	393,5	1562	1032	14,47
Оксид диазота N ₂ O	6,53	16,55			1222,8	
Диоксид азота NO ₂	7,34	19,81	-33		1443	
Озон О ₃		15,17	-143		1352	
Железо Fe	13,81	340	-	7860	6980	0,90
Кремнезём SiO ₂			911	2200		
Диоксид серы SO ₂	7,39	24,94	297		1458	
Хлор Cl ₂	6,406	20,41	-		1562,5	

4. УСЛОВИЯ НА ПЛАНЕТАХ

А. Состав атмосферы

Условие удержания газа тяготением планеты

$$\frac{v_{II}}{\langle v \rangle_{кв}} \geq 6,0 \quad (4.A.1)$$

где v_{II} – вторая космическая скорость (по формуле 3.Д.4б),

$\langle v \rangle_{кв}$ – среднеквадратичная скорость молекул в экзосфере планеты:

$$\langle v \rangle_{кв} = \sqrt{3R T_{exo} / \mu} \quad (4.A.2),$$

T_{exo} – температура экзосферы,

μ – молярная масса газа.

При отношении скоростей 5,0 газ улечивается за сотни миллионов лет, при 4,0 за тысячи лет. Время определяется по формуле Джинса:

$$t_{Дж} = \frac{\langle v \rangle_{кв}^3}{2g^2 R} \exp\left(\frac{3gR}{\langle v \rangle_{кв}^2}\right) \quad (4.A.5)$$

где $t_{Дж}$ – время, за которое концентрация газа в атмосфере уменьшается в e раз,

g – тяготение планеты,

R – радиус планеты.

Т. обр., планета с данным радиусом и тяготением может удерживать газ, молярная масса которого не меньше

$$\mu_{min} = 450 \frac{T_{exo}}{gR} \quad (4.A.3a)$$

В зависимости от массы и плотности планеты, в удобных единицах

$$\mu_{min} = 11 \text{ г/моль} \cdot \frac{T_{exo}}{1500 \text{ К}} \cdot \left(\frac{M}{M_{зем}}\right)^{-2/3} \cdot \left(\frac{\rho}{5,5 \text{ г/см}^3}\right)^{-1/3} \quad (4.A.3б)$$

Температура экзосферы Земли около 1500 К, Юпитера 1100 К, Сатурна и Урана 800 К, Нептуна 750 К. В общем случае применима эмпирическая формула

$$T_{exo} \approx 1500 \text{ К} \cdot \left[\frac{\sqrt{L^{UV} / L_{сол}^{UV}}}{r / 1 \text{ а. е.}}\right]^{0,21} \quad (4.A.4)$$

где r – расстояние от звезды до планеты,

L^{UV} , $L_{сол}^{UV}$ – ультрафиолетовые светимости звезды и Солнца:

$$L^{UV} = k_{UV} L, \quad L_{сол}^{UV} = 0,07 L_{сол} \quad (4.A.5)$$

L – полная светимость звезды,

k_{UV} – доля энергии, излучаемой в ультрафиолетовом диапазоне (определяется по таблице 2.Б.3).

Таблица 4.А.1

Допустимые для человека парциальные давления некоторых газов

Газ	Парциальное давление, атм	
	допустимый диапазон	в атмосфере Земли
Азот N ₂	0,01 – 3	0,78
Аргон Ar	до 1,6	0,01
Водяной пар H ₂ O	до 0,03	до 0,03
Кислород O ₂	0,16 – 1	0,21
Углекислый газ CO ₂	7·10 ⁻⁵ – 0,009	0,004

Б. Давление и плотность атмосферы

Давление у поверхности планеты:

$$p = \frac{M_a g}{4\pi R^2} \quad (4.Б.1а)$$

где M_a – масса атмосферы,

g – тяготение,

R – радиус планеты.

В удобных единицах

$$p = 1,25 \text{ атм} \cdot \frac{M_a \cdot 10^6}{M} \cdot \left(\frac{M}{M_{зем}} \right)^2 \left(\frac{R}{R_{зем}} \right)^{-4} \quad (4.Б.1б)$$

Таблица 4.Б.1

Отношение массы атмосферы к массе планеты* для некоторых тел Солнечной системы

Небесное тело	M_a / M
Меркурий	10 ⁻²¹
Венера	10 ⁻⁴
Земля	8·10 ⁻⁷
Марс	3·10 ⁻⁸
Юпитер	0,85 – 0,97
Сатурн	0,8 – 0,9
Титан	6·10 ⁻⁵
Уран	0,05-0,1
Нептун	0,05-0,1

*Для газовых гигантов масса атмосферы считается равной массе планеты за вычетом массы ядра.

Зависимость давления и плотности от высоты в изотермической (разреженной, $p < 0,2$ атм) атмосфере:

$$p = p_0 \cdot e^{-h/h_0} \quad (4.Б.2а)$$

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-h/h_0} \quad (4.Б.2б)$$

где p_0 – давление у поверхности,

$$h_0 = \frac{\mathfrak{R} T}{\mu g} \quad (4.Б.3а) \text{ — высота однородной атмосферы,}$$

$$\rho_0 = p_0 \frac{\mu}{\mathfrak{R} T} \quad (4.Б.3б) \text{ – плотность у поверхности,}$$

μ – средняя молярная масса воздуха,

T – средняя температура,

h – высота.

Зависимость давления, температуры и плотности от высоты в адиабатической (плотной, $p > 0,2$ атм) атмосфере:

$$p = p_0 \left(1 - \alpha \frac{h}{h_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.Б.4а)$$

$$T = T_0 \left(1 - \alpha \frac{h}{h_0} \right) \quad (4.Б.4б)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \alpha \frac{h}{h_0} \right)^{\frac{1}{\alpha} - 1} \quad (4.Б.4в)$$

где $\alpha = 1 + 1/\gamma$ – показатель адиабаты,

h_0 – высота однородной атмосферы (4.Б.3а) для $T = T_0$.

Для сухого земного воздуха $\alpha = 0,28$, для влажного $\alpha = 0,19$. Теоретические значения для сухого идеального газа: одноатомного $\alpha = 0,4$; двухатомного $\alpha = 0,28$; трёхатомного $\alpha = 0,25$.

Давление насыщенного пара некоторых веществ при температуре T (давление, при котором температура кипения равна T)

Вода (над жидкой фазой):

$$\log_{10} (p / 1 \text{ Па}) = A - B / (T - C) \quad (4.Б.5б)$$

где для температур от 273 до 333 К

$$A = 10,2326; B = 1750,286; C = 38,1;$$

для температур от 333 до 423 К

$$A = 10,0917; B = 1668,21; C = 45,1.$$

Вода (над твёрдой фазой, температура от -100 до 0 °С):

$$\ln (p / 1 \text{ Па}) = -5504,4088 / T - 3,5704628 - 1,7337458 \cdot 10^{-2} T + \\ + 6,5204209 \cdot 10^{-6} T^2 + 6,1295027 \ln T \quad (4.Б.5в)$$

Углекислый газ (над твёрдой фазой, между 130 и 300 К):

$$\ln (p / 1 \text{ мм рт. ст.}) = 168,4011 - 24,03761 \ln T - 7062,404 / T$$

$$+ 3,368548 \cdot 10^{-5} T^2 \quad (4.Б.6)$$

Аммиак (над жидкой фазой, между 190 и 333 К)

$$\log_{10} (p / 1 \text{ Па}) = 9,67956 - 1002,711 / (T - 25,215) \quad (4.Б.7)$$

Метан (над жидкой фазой, между 90 и 180 К)

$$\log_{10} (p / 1 \text{ мм рт. ст.}) = 6,61184 - 389,93 / (T - 7,15) \quad (4.Б.8)$$

Общая (неточная) формула для температуры кипения или сублимации в зависимости от давления p

$$T = \left(T_0^{-1} + \frac{\mathfrak{R}}{\Delta H} \ln \frac{p_0}{p} \right)^{-1} \quad (4.Б.9a)$$

где T_0 — температура фазового перехода (К) при давлении p_0 ,

ΔH — молярная энтальпия фазового перехода (кипения или сублимации, Дж/моль).

Обратная формула

$$p = p_0 e^{\frac{\Delta H}{\mathfrak{R}} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)} \quad (4.Б.9б)$$

Вблизи тройной точки выполняется равенство

$$\Delta H_{\text{субл}} = \Delta H_{\text{кип}} + \Delta H_{\text{плав}} \quad (4.Б.10)$$

Температура и давление в точке плавления

$$T = T_0 e^{-\frac{\Delta v}{\Delta H_{\text{плав}}} (p - p_0)} \quad (4.Б.11a)$$

$$p = p_0 - \frac{\Delta H_{\text{плав}}}{\Delta v} \ln \frac{T}{T_0} \quad (4.Б.11б)$$

где $\Delta v = v_{\text{ж}} - v_{\text{тв}}$ — разность молярных объёмов твёрдой и жидкой фаз.

Формулы (4.Б.9, 11) соответствуют действительности лишь при температурах и давлениях, близких к T_0, p_0 .

В. Температура на поверхности

Солнечная постоянная (энергия излучения звезды, поглощаемая единичной площадкой за секунду)

$$E = \frac{L}{4 \pi a^2} = E_{\text{зем}} \left(\frac{L}{L_{\text{сол}}} \right) \left(\frac{1 \text{ a. e.}}{a} \right)^2 \quad (4.В.1a)$$

где $E_{\text{зем}} = 1366 \text{ Вт/м}^2$ — солнечная постоянная Земли,

L — светимость звезды,

a — расстояние от планеты до звезды.

Для эксцентричной орбиты

$$E_{\text{сред}} = \frac{L}{4\pi a^2} \cdot (1 + \epsilon^2/2)^{-2} \quad (4.B.16)$$

где a — большая полуось орбиты,
 ϵ — эксцентриситет.

Средняя равновесная (эффективная) температура «идеальной» быстро вращающейся планеты (шара без атмосферы)

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{1}{\sigma}(1-A)\frac{E}{4}} = 278 \text{ K} \cdot \sqrt[4]{(1-A)\frac{E}{E_{\text{зем}}}} \quad (4.B.2a)$$

где A – альbedo Бонда планеты (отношение полного потока отражённого света к полному потоку падающего света).

Средняя эффективная температура медленно вращающейся планеты

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{1}{\sigma}(1-A)\frac{E}{2}} = 330 \text{ K} \cdot \sqrt[4]{(1-A)\frac{E}{E_{\text{зем}}}} \quad (4.B.26)$$

Для неосвещённой (блуждающей) планеты температура определяется внутренним нагревом (прежде всего за счёт распада радиоактивных элементов). Эффективная температура блуждающей планеты с полной мощностью теплового излучения W и удельной мощностью $w = W/M$

$$\begin{aligned} T_e &= \left(\frac{W}{4\pi r^2 \sigma} \right)^{1/4} = \left(\frac{w g}{4\pi G \sigma} \right)^{1/4} \approx \\ &\approx 32 \text{ K} \cdot \left(\frac{w}{w_{\text{зем}}} \cdot \frac{g}{9,81 \text{ м/с}^2} \right)^{1/4} \end{aligned} \quad (4.B.3)$$

где r – радиус планеты, g – ускорение свободного падения.

Удельная мощность тепловыделения для Земли и углистых хондритов $w_{\text{зем}} \approx 5 \cdot 10^{-12}$ Вт/кг.

Средняя температура в приземном слое воздуха согласно адиабатической модели парникового эффекта [Сорохтин]

$$T_0 = T_e \cdot (b p_0)^\alpha \quad (4.B.4)$$

где p_0 – давление у поверхности,

$b = 1,612 \text{ атм}^{-1}$ – поправочный коэффициент (определён для Земли и Венеры),

α – показатель адиабаты (см. формулы 4.Б.4).

Температуры в атмосфере согласно радиативной модели парникового эффекта [Чемберлен]:

на верхней границе атмосферы

$$T_{\text{top}} = \frac{T_e}{\sqrt[4]{2}} \approx 0,84 T_e \quad (4.B.5a)$$

внутри атмосферы, на высоте с давлением p

$$T_0 = T_e \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau \right)^{1/4} \quad (4.В.5б)$$

где τ — оптическая толща: $\tau = p/gq\uparrow$, $q\uparrow$ — коэффициент прозрачности атмосферы: масса воздушного столба, при прохождении сквозь который энергия восходящего (инфракрасного) излучения уменьшается в e раз. Для земной атмосферы $q\uparrow \approx 6100$ кг/м²; у поверхности Земли $\tau \approx 1,69$;

температура грунта

$$T_g = T_e \left(1 + \frac{3}{4} \tau_g \right)^{1/4} \quad (4.В.5в)$$

где τ_g — оптическая толща у поверхности.

В этой модели температура грунта отличается от температуры воздуха вблизи грунта из-за того, что не учтена конвекция. Распределение температур вблизи поверхности (между T_g и T_0) описывается адиабатической зависимостью (4.Б.4б).

Г. Тектоника

Зависимость параметров тектонических плит от массы планеты (для земноподобных планет) [Valencia].

$$\begin{aligned} \text{Средняя толщина плиты:} & \quad 43 \text{ км} \cdot (M / M_{\text{зем}})^{-0,45} \\ \text{Средняя скорость плиты:} & \quad 3 \text{ см/год} \cdot (M / M_{\text{зем}})^{1,19} \\ \text{Средняя длина плиты:} & \quad 1800 \text{ км} \cdot (M / M_{\text{зем}})^{0,28} \end{aligned} \quad (4.Г.1а-в)$$

Д. Магнитное поле

Дипольная составляющая магнитного поля планеты

$$B = B_0 (R/a)^3 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta} \quad (4.Д.1)$$

где B_0 — магнитная индукция на экваторе у поверхности планеты,

R — радиус планеты,

a — расстояние от данной точки до центра планеты,

θ — магнитная широта данной точки.

Составляющие более высокого порядка (квадрупольные, октупольные и др.), как правило, значительно меньше и быстрее убывают с расстоянием.

Таблица 4.Д.1

Магнитные поля у поверхностей Солнца и планет
(на экваторе, если не указано другое)

Небесное тело	Магнитная индукция, мкТл
Солнце (у полюсов при минимуме активности)	100-200
Меркурий	0,3
Земля	35
Земля (у полюсов)	55
Юпитер	430
Сатурн	20
Уран	10-110 (сред. 23)

Магнитная индукция на поверхности может быть выражена через магнитный момент планеты m :

$$B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m}{R^3} \quad (4.Д.2)$$

Полуэмпирическая формула для нахождения магнитного момента [Noyola]:

$$m = 10^{-5} \cdot \left(\frac{\sigma M}{P} \right)^{1,10 \pm 0,13} \quad (4.Д.3)$$

где σ — удельная проводимость жидкого ядра планеты (для металлического водорода предполагается $\sigma = (2,0 \pm 0,5) \cdot 10^5$ См/м), M — масса планеты, P — период вращения.

5. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ

А. Искривление пространства-времени

Гравитационный радиус сферического невращающегося тела:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.A.1a)$$

где M — масса тела.

В удобных единицах

$$r_g = 1,48 \cdot 10^{-27} \text{ м} \cdot (M / 1 \text{ кг}) = 0,89 \text{ см} \cdot (M / M_{\text{зем}}) = 2,95 \text{ км} \cdot (M / M_{\text{сол}}) \quad (5.A.1б)$$

Замедление времени в поле тяготения невращающегося точечного тела (метрика Шварцшильда) по сравнению с временем вне поля тяготения.

Для неподвижного наблюдателя

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - r_g/r} \quad (5.A.2a)$$

где $\Delta \tau$ — промежуток времени между событиями по часам наблюдателя в поле тяготения,

Δt — тот же промежуток времени по часам, находящимся вне поля тяготения,

r — расстояние между наблюдателем и центром тяготения.

Для наблюдателя на круговой орбите

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - 3r_g/2r} \quad (5.A.2б)$$

Растяжение пространства в поле тяготения:

$$\Delta r' = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - r_g/r}} \quad (5.A.3)$$

Релятивистское выражение для ускорения свободного падения (при $r \gg r_g$)

$$g = \frac{GM}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - r_g/r}} \quad (5.A.4)$$

Ускорение приливной силы, действующей на элемент длины $l \ll r$ при $r \gg r_g$

$$a_{\text{прил}} \approx l \frac{2GM}{r^3} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} \frac{r_g}{r} \right) \quad (5.A.5)$$

Отклонение светового луча от прямой в поле тяготения (в радианах)

$$\Delta \phi = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (5.A.6)$$

где b — расстояние между точечной массой M и траекторией светового луча.

Поле тяготения вокруг вращающейся точечной массы (метрика Керра).

Замедление времени для неподвижного наблюдателя

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - r r_g / \rho^2} \quad (5.A.7)$$

где $\rho^2 = r^2 + (K/Mc)^2 \sin^2 \varphi$,

K — момент импульса центрального тела,

φ — широта местоположения наблюдателя (отсчитывается от плоскости вращения центрального тела).

Если $\varphi = 0^\circ$ (наблюдатель находится в плоскости вращения), то формула совпадает с 5.A.2а.

Б. Чёрные дыры

Радиус горизонта событий невращающейся чёрной дыры (ЧД Шварцшильда) $R = r_g$.

В пространстве вокруг ЧД применимы формулы (5.A.1-7).

Плотность ЧД

$$\rho = \frac{1,13 \cdot 10^{19} \text{ кг/м}^3}{(M/M_{\text{сол}})^2} \quad (5.B.1)$$

Радиус наименьшей стабильной орбиты вокруг ЧД Шварцшильда (внутренний радиус аккреционного диска)

$$r_{\text{min orb}} = 3 r_g \quad (5.B.2)$$

Звезда может стать чёрной дырой, только если её момент импульса $K < K_{\text{max}}$

$$K = J M R^2 \omega < K_{\text{max}} = 2 G M^2 / c \quad (5.B.3)$$

где J — безразмерный момент инерции звезды (у Солнца $J = 0,059$),

R — радиус звезды до сжатия,

ω — угловая скорость вращения звезды до сжатия.

Гравитационный радиус вращающейся ЧД, или ЧД Керра

$$r_K = \frac{r_g}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2K}{K_{\text{max}}} \right)^2} \right] \quad (5.B.4)$$

Это полярный радиус эргосферы, её экваториальный радиус равен r_g .

Время хокинговского «испарения» ЧД

$$t_{\text{ev}} = 8,4 \cdot 10^{-17} (M/1 \text{ кг})^3 = 2,1 \cdot 10^{67} z \cdot (M/M_{\text{сол}})^3 \quad (5.B.5)$$

Мощность хокинговского излучения ЧД (Вт)

$$P = \frac{3,6 \cdot 10^{32} \text{ Вт}}{(M/1 \text{ кг})^2} = \frac{9,0 \cdot 10^{-29} \text{ Вт}}{(M/M_{\text{сол}})^2} \quad (5.B.6)$$

Время падения тела (по его собственным часам) на горизонт событий невращающейся ЧД с начального расстояния r_0 (при нулевой начальной скорости на бесконечном удалении от ЧД)

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{r_g}{c} \left[\left(\frac{r_0}{r_g} \right)^{3/2} - 1 \right] \quad (5.Б.7)$$

По часам внешнего (не падающего) наблюдателя это время бесконечно.

В. Космология

Расширение Вселенной описывается уравнением

$$r(t) = r_0 a(t) \quad (5.В.1)$$

где $r(t)$ – расстояние между гравитационно не связанными объектами (например, скоплениями галактик) в момент времени t ,

r_0 – расстояние между ними же в настоящий момент времени,

$a(t)$ – безразмерный масштабный фактор; $a(0) = 1$.

Скорость удаления одной галактики от другой, определяемая по красному смещению

$$dr/dt = H r \quad (5.В.2)$$

где $H = (da/dt) / a$ – параметр Хаббла.

Его современное значение $H_0 = 68$ (км/с) / Мпс = $1 / (13,8$ млрд. лет).

Вид зависимости $a(t)$ определяется кривизной пространства (наблюдаемое значение практически равно 0, т. е. геометрия Вселенной «плоская», евклидовская) и уравнением состояния материи во Вселенной:

$$p = w \rho c^2 \quad (5.В.3)$$

где p – давление,

ρ — плотность,

c — скорость света,

w — множитель, зависящий от той формы материи, которая преобладает во Вселенной.

Для излучения $w = 1/3$. Для вещества (в т. ч. тёмной материи) $w = 0$. Для космологической константы $w = -1$.

Зависимость масштабного фактора и параметра Хаббла от времени в модели плоской Вселенной:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(w+1)}}, \quad H(t) = \frac{2}{3(w+1)t} \quad \text{для } w > -1 \quad (5.В.4а)$$

$$a(t) \propto e^{H_0 t}, \quad H(t) = H_0 = const \quad \text{для } w = -1 \quad (5.В.4б)$$

$$a(t) \propto (t_s - t)^{\frac{2}{3(w+1)}}, \quad H(t) = -\frac{2}{3(w+1)(t_s - t)} \quad \text{для } w < -1 \quad (5.B.4в)$$

При $w > -1/3$ скорость расширения Вселенной падает со временем, при $w < -1/3$ возрастает со временем. При $w < -1$ масштабный фактор и параметр Хаббла обращаются в бесконечность («Большой Разрыв») в некоторый будущий момент времени t_s .

В инфляционной космогонии считается, что в первое время после Большого Взрыва (10^{-36} — 10^{-32} с) доминировала космологическая константа, и Вселенная испытывала инфляционное расширение по формуле (5.B.4б) при значении H между 10^{36} и 10^{42} с $^{-1}$. Затем был период доминирования излучения с $a(t) \propto t^{1/2}$, затем период доминирования вещества с $a(t) \propto t^{2/3}$. В настоящее время доминирует тёмная энергия, для которой значение w не определено, но близко к -1 (возможно, точно равно; в этом случае тёмная энергия есть космологическая константа).

Для Вселенной с материей и космологической константой зависимость между t и a

$$t = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \ln \frac{\sqrt{\Omega_{\Lambda 0} a^3} + \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}(a^3 - 1) + 1}}{\sqrt{1 - \Omega_{\Lambda 0}}} \quad (5.B.5)$$

где $\Omega_{\Lambda 0} = 0,72$ — современная доля космологической константы в средней плотности материи во Вселенной (остальные $0,28$ составляет вещество, в основном «тёмное»).

Хаббловское расстояние (или радиус хаббловской сферы)

$$r_H = c / H \quad (5.B.6)$$

– расстояние до объекта, скорость удаления которого равна скорости света. Более удалённые объекты ненаблюдаемы. Во Вселенной с $w = -1$ объем хаббловской сферы постоянен, поэтому удаляющиеся галактики будут со временем уходить из неё. Если текущее расстояние до галактики r_0 , то она уйдёт за «горизонт» через время

$$T = \frac{1}{H_0} \ln \frac{c}{H_0 r_0} = 13,8 \text{ млрд. лет} \cdot \ln \left(\frac{13,8 \text{ млрд. св. лет}}{r_0} \right) \quad (5.B.7)$$

Во Вселенной с $w < -1$ объем хаббловской сферы уменьшается:

$$r_H = -\frac{3(w+1)}{2} c \Delta t \quad (5.B.8)$$

где Δt – время, оставшееся до Большого Разрыва. По данным обсерватории «Планк» (2013 г.) $w = -1,13 \pm 0,13$, откуда следует, что если Большой Разрыв произойдёт, то не раньше чем через $35,4$ млрд. лет.

Космологическое красное смещение объекта

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{набл}}}{\lambda_{\text{изл}}} = \frac{1}{a(t)} \quad (5.B.9а)$$

где $\lambda_{набл}$ – длина волны излучения, принятого нами в данный момент,

$\lambda_{исп}$ – длина волны того же излучения, испущенного в другой галактике время t назад,

$z = \Delta\lambda / \lambda$ – красное смещение.

Скорость удаления галактики

$$v = cz \quad (5.В.9б-в)$$

Рассчитанная таким образом скорость наблюдаемой галактики может быть больше скорости света (при $z > 1$), что не противоречит теории относительности, т. к. в момент излучения скорость галактики ещё не достигала скорости света.

6. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

А. Аккреция

Скорость аккреции окружающей среды на планету или звезду (формула Бонди)

$$\frac{dM}{dt} \approx \frac{4 \pi G^2 M^2 \rho}{(v^2 + v_s^2)^{3/2}} \quad (6.A.1a)$$

где M – масса планеты,

ρ — плотность окружающей среды (газа или пыли),

v – скорость движения планеты сквозь среду,

v_s – скорость звука в среде:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma \mathcal{R} T}{\mu}} \quad (6.A.1б)$$

γ – адиабатический коэффициент газа (5/3 для одноатомных, 7/5 для двухатомных, 4/3 для многоатомных),

T – температура (К),

μ — молярная масса газа (кг/моль).

Масса атмосферы, захваченной путём аккреции за данное время, в удобных единицах

$$f = 1,75 \cdot 10^{-11} A \left(\frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right) \left(\frac{t}{1 \text{ год}} \right) \left(\frac{M}{M_{\text{зем}}} \right) \left(\frac{u}{1 \text{ км/с}} \right)^{-3} \quad (6.A.2)$$

где f – отношение массы атмосферы к массе планеты,

A — массовое число атомов среды (для атомарного водорода $A = 1$),

t – время,

n – концентрация атомов среды,

M — масса планеты,

$u = \sqrt{v^2 + v_s^2}$. Здесь не учитывается рост массы планеты и её торможение в ходе аккреции.

Облако межзвёздного газа необратимо сжимается, если его масса превышает критическую массу Джинса

$$M_J = \frac{3 k T}{4 G m_0} R \approx 44 M_{\text{сол}} \cdot \frac{T}{100 \text{ К}} \cdot \frac{R}{1 \text{ св. г.}} \quad (6.A.3a)$$

где k – постоянная Больцмана,

T — температура газа,

R – радиус облака,

G – гравитационная постоянная,

m_0 – масса атома водорода.

Эквивалентная формула: облако необратимо сжимается, если его радиус превышает критический радиус Джинса:

$$R_J \approx 120 \text{ св. г.} \cdot \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \frac{T}{100 \text{ K}} \frac{1 \text{ см}^{-3}}{n}} \quad (6.A.36)$$

Время сжатия в точку сферы с начальной плотностью ρ , на которую не действуют никакие силы, кроме самогравитации (время Джинса)

$$\begin{aligned} t_J &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{2G\rho}} = \\ &= 35 \text{ мин.} \cdot \left(\frac{\rho}{1 \text{ г/см}^3} \right)^{-1/2} = 52 \text{ млн. лет.} \cdot \left(A \frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (6.A.4)$$

Б. Самогравитация

Самогравитация тонкой сферической оболочки создаёт давление

$$p = \pi G \sigma^2 \quad (6.B.1)$$

где $\sigma = \rho h$ – поверхностная плотность оболочки,

ρ — объёмная плотность материала оболочки,

h — толщина оболочки.

Сила самогравитации тонкого кольца радиусом R и массой M , действующая на единицу длины

$$\frac{dF}{dl} = \frac{G M^2}{\pi^2 R^3} \quad (6.B.2)$$

Угловая скорость вращения кольца, при которой центробежная сила уравновешивает самогравитацию

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{G M}{R^3}} \quad (6.B.3a)$$

Соответствующий период вращения в удобных единицах

$$T = 1,76 \text{ ч.} \cdot \sqrt{\frac{(R/R_{\text{зем}})^3}{M/M_{\text{зем}}}} \quad (6.B.3б)$$

Потенциальная энергия самогравитации однородного шара радиусом R и массой M (равна работе, необходимой для разнесения всех его частиц на бесконечное расстояние, со знаком минус)

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (6.Б.4)$$

Давление внутри однородного шара на расстоянии r от центра

$$p(r) = p_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (6.Б.5а)$$

где p_c — давление в центре шара:

$$p_c = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} = \frac{1}{2} \rho g R \quad (6.Б.5б)$$

ρ — плотность шара,

g — ускорение свободного падения на поверхности.

В. Гравитация несферических тел

Потенциал гравитационного поля тонкого однородного кольца массой M и радиусом R в точке на расстоянии $r > R$ от центра кольца, на широте θ от плоскости кольца

$$V(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}(\cos \theta) \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \right] \quad (6.В.1)$$

где множитель $C_k(x)$ — интеграл от полинома Лежандра:

$$C_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_k(x \cos \phi) d\phi \quad (6.В.2)$$

Для области внутри кольца ($r < R$) в правой части формулы (6.В.1) следует поменять местами r и R .

Таблица 6.В.1

Значения множителей $C_k(x)$ для небольших k

k	$C_k(x)$	$C_k(1)$ (в плоскости кольца)	$C_k(0)$ (на оси кольца)
2	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} x^2 - 1 \right)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{8} \left(\frac{105}{8} x^4 - 15 x^2 + 3 \right)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{8}$
6	$\frac{1}{16} \left(\frac{1155}{16} x^6 - \frac{945}{8} x^4 + \frac{105}{2} x^2 - 5 \right)$	$\frac{25}{256}$	$-\frac{5}{16}$

Орбитальная скорость спутника кольца на круговой орбите радиусом $r > R$ в плоскости кольца

$$v^2 = r \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) C_{2n}(1) \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \right] =$$

$$= \frac{GM}{r} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{45}{64} \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \frac{175}{256} \left(\frac{R}{r} \right)^6 + \dots \right] \quad (6.B.3)$$

Внутри кольца ($r > R$) в его плоскости стабильные орбиты невозможны.

Потенциал гравитационного поля тонкого однородного диска массой M и радиусом R в точке на расстоянии $r > R$ от центра диска, на широте θ от плоскости диска

$$V(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_{2n}(\cos \theta) \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \right] \quad (6.B.4)$$

где значения множителей $C_k(x)$ те же, что в предыдущей формуле.

Орбитальная скорость спутника диска на круговой орбите радиусом $r > R$ в плоскости диска

$$\begin{aligned} v^2 &= r \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} C_{2n}(1) \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} \right] = \\ &= \frac{GM}{r} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \frac{15}{64} \left(\frac{R}{r} \right)^4 + \frac{175}{1024} \left(\frac{R}{r} \right)^6 + \dots \right] \quad (6.B.5) \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Barnes – R. Barnes, R. Heller: Habitable Planets Around White and Brown Dwarfs: The Perils of a Cooling Primary // arXiv:1211.6467v1
- Collins – G. S. Collins, H. J. Melosh, R. A. Marcus: Earth Impact Effects Program: A Web-based computer program for calculating the regional environmental consequences of a meteoroid impact on Earth // <http://www.lpl.arizona.edu/~marcus/CollinsEtAl2005.pdf>
- Dole – Stephen H. Dole: Habitable Planets for Man // http://www.rand.org/pubs/commercial_books/2007/RAND_CB179-1.pdf
- Griessmeier — J.-M. Griessmeier et al.: Predicting low-frequency radio fluxes of known extrasolar planets // [arXiv: 0806.0327v1](http://arXiv:0806.0327v1)
- Izzo – D. Izzo: On the deflection of potentially hazardous objects // <http://www.esa.int/gsp/ACT/doc/MAD/pub/ACT-RPR-MAD-2005-OnTheDeflectionOfPotentiallyHazardousObjects.pdf>
- Jones – B. W. Jones, P. N. Sleep, D. R. Underwood: Habitability of known exoplanetary systems based on measured stellar properties // [arXiv: 0603200](http://arXiv:0603200)
- Noyola – J. P. Noyola, S. Satyal and Z. E. Musielak: Detection of Exomoons Through Observation of Radio Emissions // arXiv:1308.4184v4
- Seager – S. Seager, M. Kuchner, C. A. Hier-Majumder, B. Militzer: Mass-Radius Relationships for solid exoplanets // [arXiv: 0707.2895v1](http://arXiv:0707.2895v1)
- Soker – N. Soker: Detecting planets in planetary nebulae // http://ads.inasan.ru/cgi-bin/nph-bib_query?bibcode=1999MNRAS.306..806S&db_key=AST&high=41e39e6fd828477
- Valencia – D. Valencia, R. J. O'Connell, D. D. Sasselov: Inevitability of Plate Tectonics on Super-Earths // [arXiv: 0710.0699v1](http://arXiv:0710.0699v1)
- Куликовский — Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. Изд. 3. М., 1961
- Сорохтин — Сорохтин О. Г., Ушаков С. А. Развитие Земли // <http://macroevolution.narod.ru/sorohtin.htm>